NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MÖBIUS

Considérations sur les courbes sphériques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 238-243

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__238_1>

CONSIDÉRATIONS SUR LES COURBES SPHÉRIQUES;

D'APRÈS M. MÖBIUS (*).

M. Möbius classe les diverses courbes algébriques planes, d'après leurs projections centrales sur une sphère donnée. A cet effet, il établit les théorèmes suivants sur ces projections, qu'il nomme *courbes sphériques, de même degré que la courbe plane projetée*. On suppose, d'ailleurs, que le centre de la sphère n'est pas sur la courbe plane. Nous supprimons les démonstrations lorsqu'elles sont faciles à trouver.

1. Théorème. *Une courbe sphérique de degré n est coupée par un grand cercle en $2n$, ou en $2n-4$, ou en $2n-6$, etc., points.*

Ainsi, à un point singulier de la courbe plane correspond un couple de points singuliers dans la courbe sphérique. La courbe plane étant algébrique, n'a pas de points d'arrêt; donc la courbe sphérique ne peut non plus s'arrêter brusquement, et ne peut avoir que des branches fermées; car une branche non fermée serait rencontrée par un grand cercle en une infinité de points,

(*) *Uber die grundformen der linien der Dritten ordnung*: Sur les formes fondamentales des lignes du troisième ordre. Leipzig, 1849; in-4°, p. 82; 1 pl.

et la courbe plane étant algébrique serait pourtant coupée par une droite en une infinité de points; ce qui est impossible.

2. A chaque branche sphérique correspond, généralement, une branche symétrique égale et non superposable. Les deux branches sont dites *géminées;* toutefois, les deux branches peuvent se confondre et n'en faire qu'une seule; alors c'est une branche *simple*. On en a un exemple dans la projection sphérique d'une droite.

Branches simples.

3. Théorème. *Un grand cercle coupe une branche simple en un nombre de points impairement pairs.*

Démonstration. Soit A un point de la branche non situé sur le grand cercle; le point A′ symétrique est nécessairement de l'autre côté du plan du grand cercle, et pour aller de A en A′, il faut nécessairement passer un nombre impair de fois par le grand cercle; donc, etc.

4. Théorème. *Une branche simple a toujours un nombre impair de couples de points d'inflexion.*

Démonstration. Supposons qu'un grand cercle touche la courbe en un point A qui ne soit pas un point singulier, il la touchera également en un point A′ diamétralement opposé. Soient B, C deux points consécutifs, à droite et à gauche de A, et supposons que AB, AC présentent ou tournent leur convexité vers le cercle tangent; il en sera de même des arcs A′B′, A′C′ par rapport à A′; donc l'arc B′A′C′ tournera sa concavité vers A; en marchant donc sur la courbe de A en A′, on rencontrera un point dans lequel la courbe ne sera ni concave ni convexe vers A et A′, c'est-à-dire un point d'inflexion et au moins un; il est évident qu'il peut y en avoir davantage, mais toujours en nombre impair.

5. Théorème. *On ne peut aller sur une branche*

simple, d'un point au point diamétralement opposé, sans rencontrer au moins un point singulier (nœud, de rebroussement ou d'inflexion).

Démonstration. Soient A et A′ deux points quelconques diamétralement opposés; B étant un point voisin à A, concevons le grand cercle ABA′, et supposons que l'arc de cercle AB tourne sa concavité vers l'arc de courbe AB; de même l'arc de courbe A′B′ tournera sa concavité vers l'arc de cercle A′B′, et par conséquent il tournera sa *convexité* vers A. Il faut donc, par le même raisonnement que ci-dessus, qu'en allant de A vers A′, il y ait un point singulier.

6. Théorème. *Une branche simple qui n'a ni nœuds, ni rebroussement, a nécessairement au moins trois couples de points d'inflexion.*

Démonstration. Entre deux points d'inflexion diamétralement opposés, on doit rencontrer un point singulier (*théorème* 5); n'étant ni un nœud, ni un rebroussement, ce point est donc d'inflexion.

Observation. Lorsque la courbe présente un nœud, ou un couple de rebroussement, il ne peut exister qu'un seul couple d'inflexion; le nœud et le rebroussement résulte alors de points d'inflexion qui se sont réunis. On peut obtenir une telle courbe si l'on divise un grand cercle en quatre quadrants A, B, A′, B′, et qu'on décrive sur AB, BA′ deux demi-cercles intérieurement au grand cercle, et sur A′B′, B′A deux autres demi-cercles extérieurement : les quatre demi-cercles forment une courbe simple qui a deux points d'inflexion en A et A′, et deux rebroussements en B et B′.

Courbes géminées.

7. Un grand cercle coupe un système de deux courbes géminées en un nombre pair de points, zéro non exclu.

8. Un système de deux courbes géminées a un nombre pair de couples d'inflexions, zéro non exclu.

Observation. Il faut se rappeler que les courbes sont fermées, et que chaque point de l'une des courbes a son opposé sur l'autre courbe.

9. THÉORÈME. *Un système de courbes géminées est coupé par un grand cercle en un nombre pair de couples de points.*

10. Une ligne sphérique de degré impair a nécessairement un nombre impair de *courbes simples* et un nombre impair de points d'inflexion.

Une ligne sphérique d'ordre pair a un nombre *pair* de courbes simples et un nombre pair de points d'inflexion, zéro non exclu.

C'est une conséquence des n^{os} 3 et 9.

11. Soit un système géminé, projection d'une ligne plane; désignons par γ une de ces courbes sphériques; menons par le centre de la sphère un plan parallèle à celui de la courbe plane, et coupant la sphère suivant un grand cercle ν; si ν ne rencontre pas γ, la courbe plane est fermée; si ν rencontre γ en un point, la courbe c a deux branches infinies de même direction. Si ν coupe γ en plusieurs points, la courbe c a autant de paires de branches infinies et de directions opposées, le nombre de ces couples de branches est nécessairement pair. Mais si γ est une courbe simple, k et k' étant deux points opposés, divisent la courbe en deux parties, chacune projection de la même courbe plane, et chaque moitié n'est rencontrée par ν qu'en un nombre impair de points; donc la courbe plane a un nombre impair de couples de branches infinies et de directions opposées.

12. Réciproquement, si le nombre de couples de branches infinies de directions opposées de la courbe plane est impair, la courbe sphérique sera simple, et si ce nombre

est pair, la courbe sphérique est géminée. D'après cela, on voit que la courbe sphérique correspondante à une conique est toujours géminée.

13. Si l'on nomme *courbe plane de la première espèce*, celle dont la projection sphérique est simple, et de la *seconde espèce*, celle dont la projection sphérique est géminée, on obtient les propositions suivantes :

1° Une courbe de première espèce est rencontrée par une droite en un nombre impair de points, et, par conséquent, elle a un nombre impair de couples de branches infinies de directions opposées; 2° une courbe de deuxième espèce est rencontrée par une droite en un nombre pair de points, et a un nombre *pair* de branches infinies de directions opposées.

Courbes du troisième degré.

14. Une courbe sphérique du troisième degré, que nous désignerons toujours par la lettre λ, n'est rencontrée par un grand cercle qu'en trois couples ou en un couple de points.

Il s'ensuit qu'une telle courbe ne peut avoir qu'une seule courbe simple, que nous désignerons par ε; car par deux couples de points de la courbe ε, faisant passer un grand cercle, il la coupera encore en deux autres points, et il faut qu'il coupe au moins une fois une autre courbe ε, ce qui est impossible.

Si la courbe ε n'a ni nœuds ni rebroussements, elle aura *trois points* d'inflexion situés sur un même grand cercle et pas davantage. La démonstration géométrique est très-compliquée; nous la supprimons. On sait, d'ailleurs, que la courbe plane ne peut avoir que trois points d'inflexion réels. Outre la courbe ε, la courbe λ peut encore avoir *une* seule courbe géminée, mais pas davantage; et les deux courbes du système géminé doivent être situées du côté opposé de la courbe ε ; ce qui est évident. Lorsque la courbe ε a trois points d'inflexion, il peut exister encore une courbe géminée ; mais, lorsqu'elle n'a qu'un point d'inflexion ou un rebroussement, la courbe géminée est impossible. Du reste, les deux courbes peuvent se réduire à des points isolés ; ce qui donne cinq cas :

1°. Une courbe simple avec trois couples de points d'inflexion et une courbe géminée ;

2°. Une courbe simple avec trois couples de points d'inflexion et un couple de points isolés ;

3°. Une courbe simple avec trois points d'inflexion, sans courbe géminée ;

4°. Une courbe simple avec un couple de points d'inflexion et un couple de nœuds ;

5°. Une courbe simple avec un couple de points d'inflexion et un couple de points de rebroussement.