NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGELO GENOCCHI

Démonstration d'un théorème d'Euler (voir t. XI, p. 327)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 235-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__235_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'EULER

(voir t. XI, p. 327);

PAR M. ANGELO GENOCCHI,
Avocat.

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule $4mn - m - n$ est nécessairement compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$.

On suppose que m, n, x, y sont aussi des nombres entiers.

Démonstration. Soit N un entier non compris dans la première formule : je dis que le nombre $4N + 1$ n'aura aucun diviseur de la forme $4m - 1$; car s'il en avait, le quotient serait de la même forme, et, en le représentant par $4n - 1$, il viendrait

$$4N + 1 = (4m - 1)(4n - 1),$$

d'où

$$N = 4mn - m - n,$$

contre l'hypothèse. Il s'ensuit que le nombre $4N + 1$ sera décomposable en deux carrés, l'un pair et l'autre impair, et qu'ainsi on pourra satisfaire à l'équation

$$4N + 1 = (2x)^2 + (2y + 1)^2,$$

qui donne

$$N = x^2 + y^2 + y.$$

Réciproquement, si un nombre entier N n'est pas compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$, le nombre $4N + 1$ ne sera pas décomposable en deux carrés, et, par suite, aura quelque diviseur de la forme $4m - 1$; le quotient pourra être exprimé par $4n - 1$, et l'on aura

$$4N + 1 = (4m - 1)(4n - 1),$$

d'où

$$N = 4mn - m - n,$$

c'est-à-dire que N sera nécessairement compris dans la formule $4mn - m - n$.

Observation. Relativement aux entiers décomposables en deux carrés, j'ajouterai aux remarques faites dans le tome XI, page 47, que la formule, dite de M. Gauss, sur le nombre des décompositions, remonte effectivement à Fermat, car elle n'est que la traduction algébrique d'une règle donnée par ce grand géomètre dans ses Notes sur Diophante (*Arithm.*, lib. III, quæst. 22, *Observ.* Fermat *ad Comm*). Elle découle aussi des développements en séries infinies, que Jacobi a introduits dans la théorie des fonctions elliptiques. La démonstration algébrique de cette formule, qui était demandée dans le tome IX, page 307, de ce Journal, et sur laquelle une question de priorité s'est élevée entre MM. Prouhet et Volpicelli, n'est pas difficile à trouver : j'en avais adressé une à M. Terquem, en novembre 1850, qui était fondée sur la théorie des nombres complexes $a + b\sqrt{-1}$ (*). Celle qu'a donnée M. Chelini dans les *Annali* de M. Tortolini, 1852, page 126, aurait besoin, ce me semble, de quelques éclaircissements, car il ne paraît pas établi d'une manière assez concluante, que les solutions obtenues sont toutes différentes, et surtout qu'il n'y en a pas d'autres.

(*) M. Laguerre-Verly nous a remis une démonstration fondée aussi sur les nombres complexes. Nous la joignons à celle de M. Genocchi.