

JOSEPH SACCHI

Solution de la question 268

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 222-224

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__222_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 268

(voir t. XI, p. 402);

PAR M. JOSEPH SACCHI, DE PAVIE.

On prend pour plan des xy celui de la section circulaire passant par le point fixe, ce point pour origine, l'axe des x passant par le centre du cercle. Soient a, b, c les coordonnées du sommet du cône, d la distance de l'origine au centre du cercle ayant r pour rayon. L'équation de la surface conique sera

$$c^2(x^2 + y^2) + m^2z^2 - 2cz(nx + by - \rho^2) - 2c^2dx - c^2q^2 = 0,$$

où

$$\begin{aligned} m^2 &= (a-d)^2 + b^2 - r^2, & n &= a-d, \\ q^2 &= r^2 - d^2, & p^2 &= q^2 + ad; \end{aligned} \quad *$$

et si, dans cette équation, au lieu de x, y, z on met respectivement les valeurs suivantes :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha \cos \beta, \quad x \sin \alpha - y \cos \alpha \cos \beta, \quad y \sin \beta,$$

on aura

$$A y^2 + B xy + C x^2 + D y + E x + F = 0,$$

où

$$A = c^2 + (m^2 - c^2) \sin^2 \beta - 2c \sin \beta \cos \beta (n \sin \alpha - b \cos \alpha),$$

$$B = -2c \sin \beta (n \cos \alpha + b \sin \alpha),$$

$$C = c^2,$$

$$D = 2c (p^2 \sin \beta - cd \sin \alpha \cos \beta),$$

$$E = -2c^2 d \cos \alpha,$$

$$F = -c^2 q^2.$$

Cette nouvelle équation représente la section du cône avec le plan passant par l'origine et formant avec le plan des xy l'angle β .

La condition que le point fixe, c'est-à-dire l'origine, soit un foyer de la courbe, est exprimée par

$$E^2 - 4CF = D^2 - 4AF, \quad DE - 2BF = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \beta (f^2 + d^2 \cos^2 \alpha) + 2 \operatorname{tang} \beta \left(h^2 \sin \alpha - q \frac{2b}{c} \cos \alpha \right) \\ + d^2 \cos 2\alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tang} \beta \left(h^2 \cos \alpha + q \frac{2b}{c} \sin \alpha \right) - d^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

ou encore

$$f^2 = \frac{q^2(c^2 - b^2) - r^2 a^2}{c^2}, \quad h^2 = \frac{a}{c} r^2.$$

Ces dernières équations fournissent les valeurs de α et β qui déterminent la position du plan sécant.

Si le cône est droit, on a

$$b = 0, \quad a = d, \quad h^2 = \frac{d}{c} r^2, \quad f^2 = \frac{q^2 l^2 - r^4}{c^2},$$

où $l = \sqrt{c^2 + p^2}$ est le côté du cône; la seconde équation donne

$$\cos \alpha = 0,$$

et, par conséquent, la première

$$\text{tang } \beta = \frac{d}{k},$$

où $k = \frac{ql + r^2}{c}$; le plan sécant devient perpendiculaire au plan xz , et $kz - dx = 0$ est son équation, qui, évidemment, représente le plan tangent à la sphère,

$$(x - d)^2 + y^2 + (z + k)^2 = k^2 + d^2.$$

Si le point fixe devait être le centre de la section, les conditions seraient

$$D = 0, \quad E = 0,$$

ou bien

$$\cos \alpha = 0, \quad p^2 \sin \beta - cd \sin z \cos \beta = 0;$$

on conclut de ces équations

$$z = 90^\circ, \quad \text{tang } \beta = \frac{cd}{p^2},$$

et $p^2 z - cdx = 0$ pour l'équation du plan sécant.

Note. Faisant $c = \infty$, le cône devient un cylindre, et l'on trouve

$$\alpha = 90^\circ, \quad \text{tang}^2 \beta = \frac{d^2}{r^2 - d^2}.$$
