NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSSIAN BONNET

Note sur quelques propriétés des courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 192-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__192_0>

NOTE SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES GAUCHES;

PAR M. OSSIAN BONNET.

M. Bouquet a démontré, dans le tome XI du Journal de M. Liouville (p. 125, 1816), que la distance de deux tangentes consécutives à une courbe gauche est un infiniment petit du troisième ordre par rapport à la distance des points de contact. On peut reconnaître l'exactitude de ce résultat d'une manière extrêmement simple.

Soient une courbe gauche C; MT, M'T' ses tangentes aux deux points infiniment voisins M et M'; OO' la plus courte distance de ces deux droites. Projetons sur un plan parallèle à OO', et soient c la projection de la courbe, mt, $m't'$ les projections des deux tangentes, oo' la projection de OO'. Il est clair que mt, $m't'$ seront perpendiculaires à oo', par suite parallèles; mais ces deux lignes sont les tangentes à la courbe c, aux points m et m', projections de M et M'; donc, entre m et m', la courbe c présente une inflexion en un certain point que nous appellerons n. Cela posé, rapportons la courbe c à la tangente au point n comme axe des x, et à la parallèle à oo' menée par n comme axe des y. L'équation de cette courbe sera de la forme

$$y = ax^3 + bx^4 + \ldots,$$

et l'ordonnée à l'origine de la tangente à cette courbe, dont l'expression générale est

$$y - x\frac{dy}{dx},$$

sera, pour les points m et m', de l'ordre du cube de l'abscisse de ces points, et par conséquent de l'ordre du cube de l'arc mm' ou de l'arc MM'; donc la différence de ces ordonnées à l'origine, ou oo', qui est égale à OO', sera aussi de l'ordre du cube de MM', comme il fallait le démontrer.

Je me suis proposé, pour compléter le théorème de M. Bouquet, de déterminer la valeur même de la plus courte distance OO'. Voici le résultat que j'ai obtenu, ainsi que quelques autres du même genre, dont la connaissance me paraît d'une certaine importance dans la géométrie des infiniment petits.

« La distance OO' des tangentes à la courbe C aux deux points infiniment voisins M et M', est égale au douzième du produit de l'élément MM' de l'arc de la courbe par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.

» L'angle de la perpendiculaire commune OO' avec l'axe du plan osculateur au point M, est la moitié de l'angle de torsion.

» La distance du point M' au plan osculateur en M est le sixième du produit de l'élément de l'arc par l'angle de contingence, par l'angle de torsion, c'est-à-dire le double de la distance OO' des deux tangentes en M et M'.

» L'angle de la tangente en M' avec le plan osculateur en M est la moitié du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.

» L'angle du plan mené par le point M' et la tangente en M avec le plan osculateur en M, est le tiers de l'angle de torsion.

» L'angle de la tangente en M avec l'intersection des plans osculateurs en M et M' est égal à la moitié de l'angle de contingence, c'est-à-dire à l'angle de la tangente en M avec la corde MM'.

» La distance du point M à l'intersection des plans osculateurs en M et M′ est égale au sixième du produit de l'élément de l'arc par l'angle de contingence. »

Etc.

Tous ces résultats s'obtiennent simplement en rapportant la courbe C à la tangente au point M comme axe des x, à la normale principale au même point comme axe des y, et à la binormale au même point comme axe des z. Pour cela on remarque qu'en exprimant les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe en fonction de l'arc s compté à partir du point M, et négligeant les puissances de s supérieures à la troisième, on a d'abord

$$(1) \quad x = s + \alpha s^2 + a s^3, \qquad y = b s^2 + b' s^3, \qquad z = c s^3,$$

car

$$dx = ds, \qquad dy = dz = d^2 z = 0,$$

pour $s = 0$.

Puis, à cause de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

c'est-à-dire

$$(1 + 2\alpha s + 3 a s^2)^2 + (2 b s + 3 b' s^2)^2 + 9 c^2 s^4 = 1,$$

on voit que

$$\alpha = 0, \qquad 6a + 4b^2 = 0.$$

Enfin, appelant ρ et r les rayons de première et de seconde courbure, on trouve facilement

$$\rho = \frac{1}{2b}, \qquad r = \frac{b}{3c}.$$

Ceci admis, la démonstration des propriétés énoncées se présente d'elle-même.

Note. La géométrie infinitésimale a donné naissance au calcul différentiel et l'a perfectionné. Newton dans les *Principia*, et Euler dans la *Methodus inveniendi lineas* sont des chefs-d'œuvre en ce genre. Depuis quelques années, cette branche est cultivée avec prédilection par des esprits distingués, en France et au dehors. Le moment semble venu de travailler à un Traité méthodique de géométrie infinitésimale : l'analyse découvre, généralise, abrége ; la géométrie éclaircit et abrége aussi, surtout par l'emploi *légitime* de la hiérarchie infinitésimale. TM.