NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

THIOLIER

Solution de la question 265

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 169-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__169_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 265;

PAR M. THIOLIER,
Élève à l'École des Mines, à Saint-Étienne.

Si $m = p^2 - q$, la suite des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{pa + mb}{a + pb}$, $\frac{a''}{b''} = \frac{pa' + mb'}{a' + pb'}, \ldots$, converge vers $\sqrt{m}$, quelle que soit la fraction initiale $\frac{a}{b}$; m, p, q, a, b sont des nombres entiers positifs donnés. (PROUHET.)

Considérons une fraction quelconque de cette suite, celle de rang $(n + 2)$ par exemple; nous aurons

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{pa_n + mb_n}{a_n + pb_n} = p - \frac{q}{\frac{a_n}{b_n} + p}.$$

Or on a, de même,

$$\frac{a_n}{b_n} = p - \frac{q}{\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} + p};$$

donc, en définitive, on aura

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p} - \cdots - \cfrac{q}{\frac{a}{b} + p}}};$$

par suite, la limite cherchée sera

$$x = p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p} \cdot_{\cdot_{\cdot \cdot \cdot \cdot}}}}$$

Or, si nous développons $\sqrt{m}$ en fraction continue, nous aurons

$$\sqrt{m} = \sqrt{p^2 - q} = p - \frac{q}{p + \sqrt{p^2 - q}}$$

$$p = - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p - \cfrac{q}{2p} \cdot_{\cdot_{\cdot \cdot \cdot \cdot}}}}$$

On voit donc qu'à la limite on a

$$x = \sqrt{m}.$$