NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SCHELLBACH

Solution du problème de Malfatti, dans le triangle rectiligne et sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 131-136

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__131_1>

SOLUTION DU PROBLÈME DE MALFATTI, DANS LE TRIANGLE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE

(voir t. V, p. 60; t. VI, p. 346; t

PAR M. SCHELLBACH,
Professeur à Ber

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 91 et p. 187; 1852.)

Triangle rectiligne.

1. Soient ABC le triangle donné, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $2s = a + b + c$; L le centre d'un des cercles cherchés, LM la perpendiculaire abaissée de L sur BC, K le centre d'un second des cercles cherchés, KH la perpendiculaire abaissée de K sur BC, $BM = y$, $CH = z$; nommons x la distance d'un des points de contact du troisième cercle au sommet A; faisons

$$a = s\sin^2\varphi, \quad b = s\sin^2\chi, \quad c = s\sin^2\psi;$$

φ, ψ, χ sont des angles connus et constructibles; et l'on aura

$$x = s.\sin^2(\sigma - \varphi), \quad y = s.\sin^2(\sigma - \chi), \quad z = s.\sin^2(\sigma - \psi),$$

où

$$2\sigma = \varphi + \chi + \psi.$$

Démonstration.

$$LM = y \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta, \quad KH = z \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma;$$

donc

$$KL = y \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta + z \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\gamma, \quad HM = a - y - z,$$

$$\left(y \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta + z \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma\right)^2 = (a - y - z)^2$$
$$+ \left(z \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma - y \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\right)^2,$$

d'où

$$y + z + 2\sqrt{yz \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma} = a,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s.(s-c)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = 1 - \frac{a}{s} = \cos^2\varphi;$$

donc

(1) $$y + z + 2\sqrt{(yz)}.\cos\varphi = s\sin^2\varphi,$$

(2) $$z + x + 2\sqrt{zx}.\cos\chi = s\sin^2\chi,$$

(3) $$x + y + 2\sqrt{xy}.\cos\psi = s\sin^2\psi;$$

les deux dernières équations s'obtiennent comme la première.

Dans un cercle de diamètre 1, construisons un triangle ayant pour angles $\sigma - \chi$, $\sigma - \psi$, $\pi - \varphi$; les côtés de ce triangle sont $\sin(\sigma - \chi)$, $\sin(\sigma - \psi)$ et $\sin\varphi$, et l'on a

$$\sin^2\varphi = \sin^2(\sigma - \psi) + \sin^2(\sigma + \chi) + 2\sin(\sigma - \psi)\sin(\sigma - \chi)\cos\varphi,$$

et deux équations semblables pour $\sin^2\chi$, $\sin^2\psi$.

Donc, si l'on prend

$$x = s.\sin^2(\sigma - \varphi), \quad y = s.\sin^2(\sigma - \chi), \quad z = s.\sin^2(\sigma - \psi),$$

les trois équations (1), (2), (3) sont satisfaites. C. Q. F. D.

Construction. Prolongeons CB en F jusqu'à ce qu'on ait $CF = s$; sur CF comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; portons de C en B, sur le côté CB.

$CD = a$ et $CE = b$; prenons, sur la demi-circonférence, les points D′, E′, B′ perpendiculairement au-dessus de D, E, B; puis l'arc B′G, vers F, égal à l'arc D′E′; de sorte que les points soient disposés dans cet ordre : C, D′, E′, B′, G, F. Prenons encore le milieu H′ de l'arc CD′E′G; si nous abaissons de H′ la perpendiculaire H′H sur CB, le point H sera le point de contact du cercle qui est dans l'angle C. On trouve de même les deux autres points de contact.

Triangle sphérique.

2. LMN est un triangle sphérique; l, m, n étant les côtés respectivement opposés aux angles, sont trois quantités connues; λ, μ, ν, sont les distances sphériques des points de contact des cercles inscrits dans les angles L, M, N, aux sommets de ces angles; trois quantités inconnues.

Faisons

$$l + m + n = 4s,\quad l - s = a,\quad m - s = b,\quad n - s = c,$$
$$s - \lambda = x,\quad s - \mu = y,\quad s - \nu = z;$$

ainsi, $a + b + c = s$.

On obtient facilement l'équation suivante (*voir* plus loin)

$$\frac{\cos a \cos y \cos z}{\cos s} - \frac{\sin a \sin y \sin z}{\sin s} = 1. \tag{1}$$

Si l'on tire la valeur de α de l'équation

$$\frac{\cos \alpha \cos b \cos c}{\cos s} + \frac{\sin \alpha \sin b \sin c}{\sin s} = 1, \tag{2}$$

alors les valeurs de y et z sont données par les équations

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(y+z) = \dfrac{\cos\left[s+\frac{1}{2}(\alpha-a)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)}, \\ \cos(y-z) = \dfrac{\cos\left[s-\frac{1}{2}(\alpha-a)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+a)}. \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (2), on pose

$$(4)\qquad \tan\varphi = \tan b \tan c \cot s;$$

on trouve alors

$$(5)\qquad \cos(\alpha-\nu) = \frac{\cos s \cos\varphi}{\cos b \cos c}.$$

On peut *construire* les équations (3), (4), (5) à l'aide de triangles sphériques rectangles.

Une permutation convenable entre les lettres fournit encore deux autres équations analogues aux équations (1) et (2); dans cette solution, s peut représenter un arc quelconque.

3. *Calcul de l'équation* (1) (*).

OO′ étant la ligne des centres de deux petits cercles de rayon r et r', faisons $OO' = p$; nous aurons

$$\begin{aligned} \cos p &= \sin r \sin r' + \cos r \cos r' \cos(l-\mu-\nu) \\ &= \cos r \cos r' - \sin r \sin r', \end{aligned}$$

puisque $p = r + r'$.

De là on tire

$$\tan r \tan r' = \sin^2 \frac{1}{2}(l-\mu-\nu);$$

(*) Par M. H. Faure, lieutenant d'artillerie d'un autre côté,

$$\operatorname{tang} r = \sin \mu \operatorname{tang} \frac{1}{2} M,$$

$$\operatorname{tang} r' = \sin \nu \operatorname{tang} \frac{1}{2} N,$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} r \operatorname{tang} r' &= \sin \mu \sin \nu \operatorname{tang} \frac{1}{2} M \operatorname{tang} \frac{1}{2} N \\ &= \frac{\sin \mu \sin \nu \sin (2s - l)}{\sin 2s}, \end{aligned}$$

d'après le principe de Neper. On a donc

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} (l - \mu - \nu) &= \frac{\sin \mu \sin \nu \sin (2s - l)}{\sin 2s} \\ &= \frac{1}{2} [1 - \cos (l - \mu - \nu)]. \end{aligned}$$

Décomposant le produit $\sin \mu \sin \nu$ en sommes, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(\mu - \nu) \sin (2s - l) - \sin 2s = \cos(\mu + \nu) \sin (2s - l) \\ - \sin 2s \cos (l - \mu - \nu); \end{aligned}$$

le second membre se décompose ainsi,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin (2s + \mu + \nu) + \sin (2s - l - \mu - \nu) \\ - \sin (2s + l - \mu - \nu) - \sin (2s + \mu + \nu) \end{bmatrix} \\ &= - \sin l \cos (2s - \mu - \nu); \end{aligned}$$

donc

$$\sin 2s = \cos(\mu - \nu) \sin (2s - l) + \sin l \cos (2s - \mu - \nu),$$

ou bien

$$\sin 2s = \cos (y - z) \sin (s - a) + \sin (s + a) \cos (y + z).$$

Or, évidemment

$$\begin{aligned} 2 \sin 2s = &[\sin (s + a) + \sin (s - a)] [\cos (y - z) + \cos (y + z)] \\ &- [\sin (s + a) - \sin (s - a)] [\cos (y - z) - \cos (y + z)], \end{aligned}$$

d'où

$$\sin s \cos s = \sin s \cos a \cos y \cos z - \cos s \sin a \sin y \sin z,$$

ou

$$1 = \frac{\cos a \cos y \cos z}{\cos s} - \frac{\sin a \sin y \sin z}{\sin s}.$$

Malfatti (Jean-François) est né en 1731, d'une famille noble, à Ala, petite ville du Tyrol, près de Roveredo; il étudia les belles-lettres à Trente et à Vérone et se rendit de là à Bologne, pour se perfectionner dans les sciences et particulièrement dans les mathématiques. Il y fit de rapides progrès, et, lors du rétablissement de l'université de Ferrare, il fut nommé professeur. Là, il acquit une grande réputation par la solution de plusieurs problèmes difficiles, et surtout par le problème sur les pressions qu'un poids exerce sur les appuis qui le soutiennent. Un des premiers membres de la Société italienne fondée par Lorgna, il a inséré divers Mémoires dans le recueil publié par cette Société et est mort en 1807. Son nom est attaché au problème ci-dessus, dont il a le premier donné une solution analytique, sans démonstration; ses formules, que des géomètres distingués ont en vain cherché de retrouver, n'ont été démontrées que depuis peu d'années (*).