Nouvelles annales de mathématiques

E. Coupy

Solution de la question 128

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 126-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__126_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 128

(voir t. V, p. 448) ;

Par M. E. COUPY,

Professeur au Collége militaire.

Quelle est la formule qui donne tous les quantièmes d'années dans lesquelles le mois de février a cinq dimanches ?

Solution. Il est évident que les années demandées sont bissextiles, et que le 1er février doit y être le dimanche; d'ailleurs, quand le 1er février est un dimanche, le 1er janvier est un jeudi. La question est donc ramenée à la suivante:

Quelles sont les années bissextiles commençant par un jeudi ?

1. Je résoudrai d'abord la question pour le calendrier julien, ce qui est beaucoup plus simple; et je passerai ensuite au calendrier grégorien. On sait que dans le calendrier julien, les dates de l'année reviennent périodiquement aux mêmes jours de la semaine, après une période de vingt-huit ans, dite *cycle solaire*. Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé dans ce calendrier une année répondant à la question, et soit A le millésime de cette année; il est clair que $A + 28n$, n étant un entier quelconque positif ou négatif, répondra à la question. Il faut prouver qu'entre A et $A + 28$, il ne s'en trouve aucune de bissextile commençant par un jeudi; or le jour de la semaine qui commence l'année, avance de 5 rangs en 4 ans, ou de $5x$ rangs en $4x$ années, et la plus petite valeur de x qui rendra $5x$ multiple de 7, est évidemment $x = 7$. Ce sera donc seulement après $4.7 = 28$ ans, que l'année bissextile commencera par le même jour de la semaine que la bissextile A. Donc enfin $A + 28\,n$ est la formule demandée; reste à déterminer la constante A.

Je remarquerai d'abord que les jours de la semaine se correspondent aux dates prises dans les deux calendriers, julien et grégorien; car Grégoire XIII, par son ordonnance de 1582, fit dater vendredi 15 octobre, le lendemain du jeudi 4 octobre; l'accord des jours de la semaine a donc continué à régner dans les deux calendriers. Or, on sait que l'année julienne est maintenant en retard de 12 jours sur la nôtre; le 1er janvier 1851 a donc été, dans ce calendrier, le même jour que notre 13 janvier, c'est-à-dire un lundi; partant de là, il est facile de trouver que l'année julienne bissextile 1876 commencera par un jeudi, donc $1876 + 28n$ est la formule cherchée; mais 1876 est un multiple de 28, ce qui réduit simplement à $28n$ la formule demandée.

2. Résolvons maintenant la question pour le calendrier grégorien. Supposons encore que, par un moyen quelconque, on ait pu déterminer dans ce calendrier la date B d'une année répondant à la question. J'appellerai *années grégoriennes*, les années séculaires qui ne sont pas bissextiles. Cela étant, il est clair que $B + 28n$, n étant entier positif, sera encore une date convenable, pourvu que $B + 28n$ pour la valeur donnée à n, ne passe pas par-dessus une ou plusieurs années grégoriennes; s'il en était autrement, voyons quelle correction devrait subir la formule. Dans le calendrier julien, le jour de la semaine qui commence l'année avance, avons-nous dit, de $5x$ rangs en $4x$ années; mais, si nous passons par une année grégorienne, il n'avancera plus que de $(5x - 1)$ rangs; expression qui est un multiple de 7 pour $x = 3$, ou $x = 10$. Or $x = 3$ donnerait $4x = 12$, et ce nombre < 28, doit être rejeté comme on verra plus loin; reste donc seulement $x = 10$, d'où $4x = 40$. Donc quand on passera sur une grégorienne, il faudra augmenter de 40 ans, au lieu de 28, la date qui répondait à la question, pour avoir la date immédiatement suivante qui y répond aussi; et comme $40 = 28 + 12$, il faudra donc augmenter $B + 28n$ d'autant de fois 12 qu'il y aura de grégoriennes depuis B. Avant d'établir la formule, cherchons la constante B. Comme le calendrier grégorien ne date que de 1582, je

la chercherai dans le XVII^e siècle. Or on sait (*voir* FRANCOEUR, *Uranographie*, page 111) que le 1er mars 1600 était un mercredi; donc, comme l'année était bissextile, le 1er janvier 1600 était un samedi, d'où il est facile de conclure que le 1er janvier 1604 était un jeudi. On peut donc prendre pour B la valeur $B = 1604$, et par conséquent $1604 + 28n$; n étant égal à 1, 2, 3, c'est-à-dire 1632, 1660, 1688, répondent à la question; mais ensuite 28 années ajoutées à 1688, faisant passer sur la grégorienne 1700, il faut ajouter 40 à 1688, ce qui donne 1728; puis ensuite on aura 1756, 1784, puis $1784 + 40 = 1824$, parce qu'on passe la grégorienne 1800; et ainsi de suite.

Ainsi on peut former facilement le tableau suivant des années répondant à la question :

1604	1728	1824	1920	2004	etc.
1632	1756	1852	1948	2032	
1660	1784	1880	1976	2060	
1688				2088	

l'année $2004 = 1976 + 28$, parce que 2010 n'est pas grégorienne. Arrivé à la cinquième colonne de ce tableau, il est facile de le prolonger indéfiniment, d'après la loi que nous avons indiquée, ou, plus simplement, en se rappelant que dans le calendrier grégorien, après 400 années, la date de l'année répond au même jour de la semaine, car

$$365 \times 400 + 97 = 146097 \text{ jours} = \text{exactement } 20871 \text{ semaines};$$

aussi retrouvons-nous, pour les dates de la cinquième colonne, les dates de la première augmentées chacune de 400 ans; de même, les dates de la sixième colonne seraient celles de la deuxième augmentées de 400 ans, c'est-à-dire 2128, 2156, 2184, et ainsi de suite. Nous voyons aussi, par ce tableau, que 1604 est la première année, depuis l'établissement du calendrier grégorien, qui réponde à la question. On voit aussi, par ce tableau, pourquoi on doit exclure $4x = 12$, car 12 ajouté à 1688, ou à 1784, ou à 1880, ou enfin à 1976, ne fait passer par-dessus aucune année grégorienne. Enfin, on voit encore, par ce tableau, qu'il n'y a que 3 années par siècle, répondant à la question, excepté dans le siècle contenant la séculaire bissextile qui en renferme 4, ce qui fait 13 ans en quatre siècles. Dans le calendrier julien, elles reviennent périodiquement tous les 28 ans, et il y en a 14 dans le même laps de temps.

3. Il résulte des considérations précédentes, que la formule demandée est

$$z = 1604 + 28n + 12p.$$

Il est facile de voir que tant que n est inférieur à 4, p est nul.

Faisons $n - 3 = 13m + r$; nous aurons

$$z = 1604 + 28n + 12(3m + R).$$

R dépend de r de la manière suivante :

r	R,
ne dépasse pas 3	1,
dépasse 3 et ne dépasse pas 6	2,
dépasse 6	3.

C'est ce qu'on voit en donnant à n, successivement, les 13 valeurs de la suite 4, 5, 6, ..., 16; et K étant un de ces nombres, la valeur de R revient la même pour les valeurs de $n = K + 13$.

Exemple. Faisons $n = 8$, $n - 3 = 5$, $m = 0$, $r = 5$, $R = 2$; donc,

$$z = 1604 + 28.8 + 12.2 = 1852.$$

Cette formule convient tant que le calendrier grégorien n'aura pas besoin de correction.

Note. Les formules de M. Gauss, pour calculer les trois pâques, julienne, grégorienne, judaïque, n'ont pas encore été démontrées en France; beau sujet d'une thèse à soutenir. TM.