NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BACH

Sur le calcul des sinus (voir t. I, p. 272, 253, t. III, p. 11)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 108-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__108_1>

SUR LE CALCUL DES SINUS

(voir t. I, p. 272, 353, t. III, p 11) ;

PAR M. BACH,

Professeur de Mathématiques supérieures au Lycée de Strasbourg.

La formule de Simpson donne

$$\sin 12.10'' = 2\sin(n-1)10'' - \sin(n-2)10'' - \mathrm{K}\sin(n-1)10'',$$

$$\mathrm{K} = 2 - 10510'' = 0{,}000000002350\ \ldots$$

Je désigne par $e + \varepsilon$ la valeur exacte du sinus de $10''$, et par e la valeur approchée; il vient

$$\sin 20'' = 2(e+\varepsilon) - \mathrm{K}(e+\varepsilon) = 2e - \mathrm{K}e + \varepsilon(2-\mathrm{K}),$$

K étant une quantité négligeable par rapport à 2.

Je calcule $2e - \mathrm{K}e$ avec i décimales, i étant jusqu'ici un nombre indéterminé.

Je désigne par e_1 la valeur de $2e - \mathrm{K}e$ calculée avec

i décimales en moins, et par ε_1 l'erreur commise; il vient

$$\sin 20'' = e_1 + \varepsilon_1.$$

ε_1 sera plus petit que $\frac{1}{10^i} + 2\varepsilon$, et si je pose, pour simplifier l'écriture, $\frac{1}{10^i} = \alpha$, on aura

$$\varepsilon_1 < \alpha + 2\varepsilon.$$

On aura ensuite

$$\begin{aligned} \sin 30'' &= 2(e_1 + \varepsilon_1) - e - \varepsilon - \mathrm{K}(e_1 + \varepsilon_1) \\ &= 2e_1 - e - \mathrm{K}e_1 + \varepsilon_1(2 - \mathrm{K}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Je calcule encore $2e_1 - e - \mathrm{K}e_1$ avec i décimales en moins, et je désigne par e_2 cette valeur, par ε_2 l'erreur commise; il vient

$$\sin 30'' = e_2 + \varepsilon_2 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_2 < \alpha + 2\varepsilon_1 - \varepsilon.$$

J'aurai ensuite

$$\begin{aligned} \sin 40'' &= 2(e_2 + \varepsilon_2) - e_1 - \varepsilon_1 - \mathrm{K}(e_2 + \varepsilon_2) \\ &= 2e_2 - e_1 - \mathrm{K}e_2 + \varepsilon_2(2 - \mathrm{K}) - \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Je calcule encore $2e_2 - e_1 - \mathrm{K}e_2$ avec i décimales; je nomme e_3 cette valeur, et ε_3 l'erreur commise, et j'ai

$$\sin 40'' = e_3 + \varepsilon_3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 < \alpha + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

Je continue de la même manière et je suis conduit à écrire la suite des inégalités:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 < \alpha + 2\varepsilon, \\ &\varepsilon_2 < \alpha + 2\varepsilon_1 - \varepsilon, \\ &\varepsilon_3 < \alpha + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_1, \\ &\varepsilon_4 < \alpha + 2\varepsilon_3 - \varepsilon_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\varepsilon_{n-1} < \alpha + 2\varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-3}, \end{aligned}$$

ε_{n-1} étant l'erreur qui affecte $\sin n.10''$.

De ces inégalités on tire facilement les suivantes :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &< \alpha + 2\varepsilon,\\
\varepsilon_2 &< 3\alpha + 3\varepsilon,\\
\varepsilon_3 &< 6\alpha + 4\varepsilon,\\
\varepsilon_4 &< 10\alpha + 5\varepsilon,\\
\varepsilon_5 &< 15\alpha + 6\varepsilon,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les coefficients de ε suivent la série des nombres naturels, les coefficients de α la série des nombres triangulaires ; on peut donc écrire

$$\varepsilon_{n-1} < \frac{n(n-1)}{2}\alpha + n\varepsilon\,;$$

telle sera l'erreur commise sur $\sin(n.10'')$, si l'on garde toujours i décimales dans la suite des calculs.

Si l'on s'arrête à $45°$, on a

$$45° = 2700' = 10'' \times 16200\,;$$

faisons $n = 16200$, on a

$$\frac{n(n-1)}{2} = 8100 \times 16200 < 2 \times 10^8.$$

16200 est d'ailleurs plus petit que 2×10^4 et $\varepsilon < \frac{2}{10^{14}}$ (en prenant pour la limite de l'erreur le sixième du cube de l'arc).

Ainsi l'erreur commise sur $\sin 45°$ sera plus petite que $\frac{2 \times 10^8}{10^i} + \frac{4 \times 10^4}{10^{14}}$.

Si donc on a commencé et continué le calcul avec 18 décimales, l'erreur finale sera plus petite que $\frac{6}{10^{10}} < \frac{1}{10^9}$; on pourra donc compter sur les 9 premières décimales.

Remarque. Il est bien entendu que pour calculer Ke, Ke_1, etc., on emploiera la multiplication abrégée.

On procéderait de la même manière pour le calcul des cosinus; seulement je ferai remarquer que si l'on a calculé cos 10″ avec 18 décimales, l'erreur relative à ε sera négligeable par rapport à l'erreur relative à α, et l'on pourra encore compter finalement sur 9 bonnes décimales pour le cosinus de 45°.