NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CAMILLE-ARMAND-JULES-MARIE DE POLIGNAC

Grand concours de 1851. Solution du problème de mathématiques supérieures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 91-98

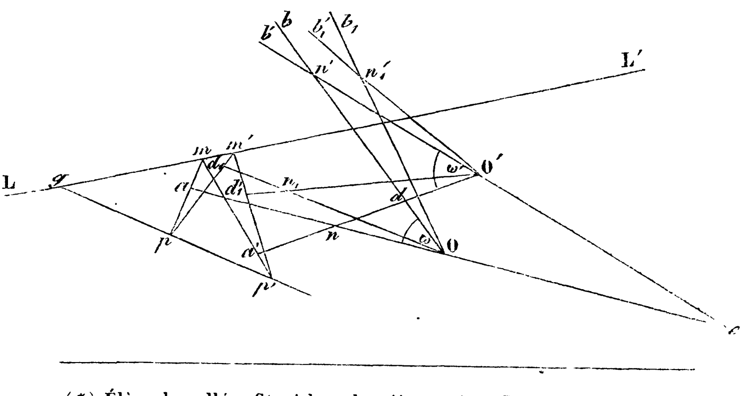
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__91_0>

GRAND CONCOURS DE 1851.

SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES;

PAR M. CAMILLE-ARMAND-JULES-MARIE DE POLIGNAC,
Né à Millemont [Seine-et-Oise (*)].

Étant donnée une droite LL', on mène de chacun de ses points m, deux droites à deux points fixes p, p'. Deux autres points fixes O et O' sont les sommets de deux angles aOb, $a'O'b'$ de grandeurs données, et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs, de manière que les côtés Oa, $O'a'$ soient respectivement perpendiculaires sur mp, mp'. On demande : 1° Quelle est la courbe qui est décrite par le point d'intersection n des deux côtés Oa, $O'a'$; 2° quelle est la courbe qui est décrite par le point d'intersection n' des deux autres côtés Ob, $O'b'$, quand le point m glisse sur la droite LL'.



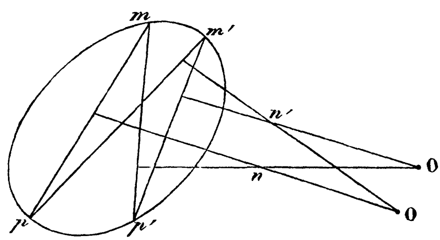
(*) Élève du collége Stanislas, deuxième prix. (Classe de M. Cabart.)

Occupons-nous de la première partie de la question. Les faisceaux issus des points p, p' sont homographiques, puisqu'ils se coupent en des points situés en ligne droite. D'ailleurs, si l'on considère le faisceau issu du point O, tous ses rayons sont perpendiculaires sur les rayons du faisceau issu du point p; donc les angles formés par deux de ces rayons Oa, O$a_{,}$ sont égaux aux angles formés par leurs homologues pm, pm' : les faisceaux issus des points p et O sont donc homographiques. De même le faisceau issu du point O$'$ ayant tous ses rayons perpendiculaires sur ceux du faisceau p', est homographique de ce dernier; mais p' est homographique du faisceau p; donc les faisceaux O, O$'$ sont homographiques.

Il en résulte que le lieu des points n est une conique passant par les deux points O, O$'$. Cette conclusion repose sur ce théorème connu : Si l'on joint tous les points d'une section conique à deux points quelconques pris sur la courbe, on obtiendra deux faisceaux homographiques. Ce théorème, évident dans le cas d'un cercle, puisque les angles homologues des deux faisceaux sont tous égaux, s'étend par projection à une conique quelconque, et la réciproque est d'ailleurs facile à apercevoir. Les points n se trouvent donc sur une conique passant par O, O$'$. Passons maintenant à la seconde partie de la question.

Les rayons issus du point O, Oa, O$d_{,}$, etc., d'une part, Ob, O$b_{,}$, etc., d'autre part, forment deux faisceaux homographiques, car les angles homologues sont égaux comme différence d'angles égaux. Pour la même raison, le faisceau O$'$ a', O$'$ $d'_{,}$, etc., est homographique de O$'$ b', O$'$ $b'_{,}$, etc.; mais les faisceaux Oa, O$d_{,}$, etc., et O$'$ a', O$'$ $d'_{,}$, etc., sont homographiques; donc les faisceaux issus des points O, O$'$ et se coupant suivant les points n', sont homographiques; donc ces points se trouvent sur une conique passant par les points O et O'.

La même construction fournit deux autres coniques passant par O et O'. On verra en effet, aisément, par les mêmes considérations, que les lieux des points *e* et *d* sont deux coniques passant par les deux points en question.



Généralisation. — Remplaçons la droite LL' par une conique passant par les deux points *p* et *p'*, et cherchons le même lieu que précédemment, en supposant que le point *m* se meuve sur la conique. D'après le théorème que nous venons de rappeler, les faisceaux issus des points *p* et *p'* seront toujours homographiques. Il en sera donc de même des faisceaux issus des points O et O', dont les rayons, en se coupant, déterminent le lieu des points *n*. Par suite, ces points sont situés sur une conique qui passe par O et O'.

La question donnée n'est qu'un cas particulier de celle-ci : c'est le cas où la section conique se réduit à deux droites LL', *pp'*.

Cherchons maintenant à reconnaître comment varie la nature des coniques (lieu des points *n*) avec la *courbe directrice*, et examinons d'abord la question donnée, dans laquelle la conique directrice se réduit au système des deux droites LL', *pp'*.

Remarquons que lorsque le point mobile sur la droite LL' se trouvera en *g*, les deux rayons issus de *p* et *p'* se confondront, et les perpendiculaires menées par les points O, O′ seront parallèles, ce qui fournit un point de la courbe située à l'infini; d'ailleurs, en supposant que le point mobile s'éloigne indéfiniment sur la droite LL′, les rayons issus des points p, p' deviennent parallèles à cette droite; les perpendiculaires menées par O et O′ sont donc parallèles entre elles, et à ces lignes correspond, par conséquent, un point de la courbe situé à l'infini. Nous trouvons donc *deux* directions donnant des points à l'infini; d'ailleurs, le lieu des points n ne peut pas, dans le cas général, être une ligne droite, puisque deux rayons homologues issus des points O, O′ ne se confondent jamais (*) : le lieu cherché est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires, l'une à la droite LL′, l'autre à la droite pp'.

Il sera d'ailleurs facile de construire cette hyperbole, après avoir obtenu préalablement le point n, car on connaîtra alors trois points de la courbe et la direction des asymptotes. Ces données permettent de construire aisément les diamètres conjugués des cordes qui joignent deux à deux les points n, O, O′, par suite le centre et les asymptotes. Connaissant les asymptotes et un point, une construction bien connue en fait obtenir autant qu'on veut.

Revenons au cas général, et supposons que la courbe directrice soit une ellipse. Deux rayons pm, $p'm$ ne seront jamais parallèles; de plus, ils ne se confondront jamais, car même, si l'on suppose que le point mobile soit arrivé en p, l'un des rayons sera $p'p$, l'autre la tangente au point p. Il en résulte que les droites menées

(*) Lorsque deux faisceaux homographiques ont deux rayons homologues qui se confondent, le lieu des intersections de leurs rayons est une ligne droite, et réciproquement par O et O′, qui déterminent les points du lieu, ne seront jamais parallèles; par suite, la courbe n'ayant aucun point à l'infini, sera une ellipse. Si la courbe directrice était un cercle, l'angle $OnO' = pmp'$ étant constant, le lieu des points n serait un segment capable de cet angle décrit sur OO′.

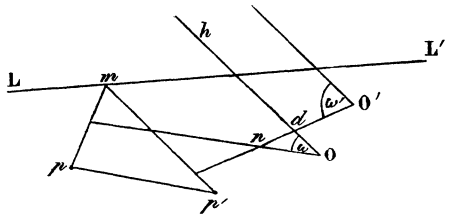
Supposons, en second lieu, que la courbe directrice soit une parabole. Lorsque le point m s'éloignera sur la courbe jusqu'à l'infini, les deux rayons pm, $p'm$ seront parallèles : ce sera d'ailleurs la seule direction pour laquelle les perpendiculaires menées par O et O′ seront parallèles. La courbe engendrée par le point n ayant des points situés à l'infini, mais dans une seule direction, sera une parabole.

Enfin, en supposant que la conique directrice soit une hyperbole, on verra pareillement qu'on trouve pour les perpendiculaires issues des points O et O′ *deux* directions donnant des points situés à l'infini, ce qui prouve que, dans ce cas, le lieu des points n est aussi une hyperbole. Ses asymptotes sont perpendiculaires aux asymptotes de la première.

Cette hyperbole pourrait d'ailleurs se réduire au système de deux droites; c'est ce qui arriverait si, par exemple, la ligne OO′ était perpendiculaire à l'une des asymptotes de l'hyperbole directrice. Car alors les deux parallèles menées par O et O′, qui doivent donner un point à l'infini, venant à se confondre, les faisceaux homographiques O et O′ auraient deux rayons homologues se confondant, et les intersections des autres seraient en ligne droite (*). Remarque analogue dans le cas de la parabole.

(*) C'est d'ailleurs le seul cas où le lieu des points n peut se réduire au système de deux droites

Concluons qu'en général le lieu des points n est une conique de même nature que la courbe directrice ou une variété de cette courbe.



Lorsque le point mobile m se meut sur la droite LL', le lieu des points n peut aussi être une ligne droite, et cela arrivera quand la ligne OO' sera perpendiculaire à l'une des deux lignes pp' ou LL', ce qu'on peut déduire, comme cas particulier, de ce que nous avons remarqué précédemment. La courbe engendrée par le point n' peut aussi présenter cette particularité. En effet, si nous supposons que l'angle pmp' soit égal à $\omega' - \omega$, on aura

$$dn\mathrm{O} = \omega' - \omega;$$

par suite, l'angle hdn sera égal à ω', et deux rayons déterminant les points n' seront parallèles; si, de plus, la droite OO' fait avec pm l'angle $90^\circ - \omega$, ou, avec pm', l'angle $90^\circ - \omega'$, les faisceaux homographiques qui déterminent les points n' ayant deux rayons homologues se confondant, le lieu de ces points sera une ligne droite.

Si les angles ω et ω' étaient égaux, les rayons On', O'n' seraient parallèles en même temps que les rayons On, O'n. Donc la courbe engendrée par le point n' serait une hyperbole dont les asymptotes feraient, avec celles de l'hyperbole lieu des points n, l'angle ω; si, en même temps que $\omega' = \omega$, la droite OO' faisait avec pp' l'angle $90^\circ - \omega$, ou, avec LL', l'angle ω, le lieu des points n' serait une ligne droite.

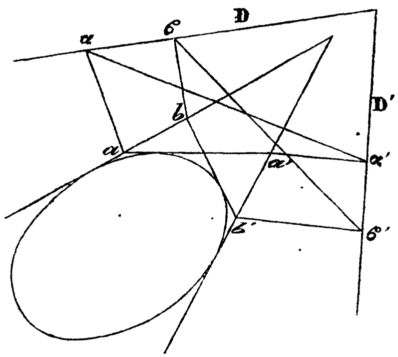
Remarque. Nous avons supposé jusqu'ici que les droites déterminant les points n étaient perpendiculaires sur les rayons pm, pm'; on peut encore généraliser les résultats obtenus dans cette hypothèse. Revenons, en effet, au cas général dans lequel le point m est supposé se mouvoir sur une conique passant par p et p'; menons par le point O des droites faisant un angle constant α avec tous les rayons tels que pm; par le point O', des droites faisant un angle constant α' avec tous les rayons tels que $p'm$. Le lieu des intersections de ces droites sera une conique passant par O et O'.

En effet, le point a, sommet d'un angle constant, se meut sur un cercle qui passe par les points p et O.

Par suite, les faisceaux issus de ces points sont homographiques. Pour une raison analogue, les faisceaux issus des points O' et p' sont homographiques. Mais le faisceau issu du point p est homographique du faisceau p'; donc les faisceaux O et O' le sont entre eux, et le point n engendre une conique passant par O et O'.

Supposons que les angles en question soient égaux, et que la ligne OO' fasse avec pp' ce même angle α : considérons deux positions quelconques correspondantes des points m et n. Les trois côtés du triangle OnO' sont également inclinés sur ceux du triangle pmp'; par suite, ces deux triangles sont semblables, et le rapport $\frac{pm}{\mathrm{O}n}$ étant constant, il s'ensuit que le lieu des points n sera une conique semblable à la première, et le rapport de similitude sera $\frac{\mathrm{OO}'}{pp'}$.

Ceci comprend, comme cas particulier, un résultat précédemment obtenu. Nous avons vu, en effet, dans le cas de la droite LL', que le lieu des points n déterminé par les perpendiculaires menées par O et O′ était une ligne droite si OO′ était perpendiculaire sur pp'.



Proposition corrélative. — On a une conique, deux tangentes fixes et une tangente mobile. Par ses divers points d'intersection avec les deux tangentes fixes, on mène des perpendiculaires sur deux droites D, D′; on joint les pieds des perpendiculaires correspondantes. La droite $\alpha\alpha'$ enveloppe une conique.

En vertu d'un théorème, corrélatif de celui qui nous a servi à résoudre la question donnée, les points a, b,..., a', b',..., sont homographiques. Par suite, il est évident, à cause des parallèles, que les points α, β, etc., α', β', etc., seront aussi homographiques. Donc la droite $\alpha\alpha'$ enveloppe une conique tangente aux droites D, D′.