NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 73-80

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__73_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Thèses d'Analyse et de Mécanique, présentées à la Faculté des Sciences de Paris, le 1er mai 1851; par M. *Gerónimo Frontera*. Thèse d'Analyse: *Sur une formule de M. Cauchy*. Thèse de Mécanique (*programme*) : *Sur l'attraction des corps en général*; in-4° de 44 pages. Imprimerie de Bachelier.

1. Les propriétés des fonctions analytiques sont intimement liées aux valeurs qui annulent ces fonctions, et à celles qui les rendent infinies, c'est-à-dire à leurs racines, et à ce qu'on peut, avec M. Liouville, appeler leurs infinis. Lorsque a est un infini de la fonction $f(z)$, d'ailleurs bien déterminée, $f(z)$ est développable suivant les puissances ascendantes de $z-a$, à partir d'une puissance négative dont l'exposant est marqué par le degré de multiplicité de l'infini considéré. Parmi les coefficients de ce développement, celui de $(z-a)^{-1}$, que l'on nomme résidu de $f(z)$ relatif à l'infini a, mérite une attention particulière, comme étant très-propre à caractériser la marche de la fonction dans le voisinage de la valeur a. M. Cauchy a le premier signalé l'importance des résidus, et fondé sur le rôle qu'ils jouent dans la théorie des fonctions, une nouvelle branche de calcul, susceptible d'applications extrêmement variées. M. Cauchy a donné à ce calcul toute l'étendue possible, en considérant non-seulement des fonctions imaginaires, mais encore des variables imaginaires. Au premier abord,

une si grande généralité peut sembler un embarras, et l'on serait tenté de regarder comme stériles les efforts employés à combiner de purs symboles sans application immédiate. Il n'en est rien : la principale utilité des imaginaires consiste à rétablir la continuité là où elle a disparu. Par leur moyen, les principes se réduisent au plus petit nombre possible, en même temps que leurs conséquences se multiplient et se concentrent dans des formules d'une fécondité prodigieuse. Considérée dans son origine et dans ses développements, la théorie des résidus présente donc tous les caractères d'une science bien faite.

La première thèse de M. Frontera, la seule que nous ayons à analyser, se rapporte à cette magnifique création de notre illustre analyste.

2. Dans le § I^{er} (3-4), l'auteur expose le but de son travail, et indique ce qu'il y considère comme nouveau.

3. Le § II (4-6) est consacré aux définitions et aux notations du calcul des résidus.

4. Dans le § III (7-12), l'auteur, après avoir défini ce qu'on doit entendre par une intégrale prise le long d'un contour, aborde la proposition fondamentale résumée dans la formule suivante :

$f(z)$ étant une fonction bien déterminée d'une variable z de la forme

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y);$$

c, un contour fermé ne passant par aucun infini de la fonction, mais pouvant en comprendre un certain nombre dans son intérieur;

ds, un élément de ce contour;

H, le résidu relatif à un infini (a, b) situé dans l'intérieur du contour;

$2k$, la différence entre le nombre des variations descendantes et ascendantes du rapport;

$$\frac{\psi(x, y) - \psi(a, b)}{\varphi(x, y) - \varphi(a, b)},$$

pour toute l'étendue du contour parcouru dans le sens direct de rotation;

$$\int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} ds,$$

l'intégrale définie prise le long du contour : on a

$$\int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} ds = 2\pi i \sum \mathrm{H} k,$$

formule où le signe $\sum$ se rapporte à tous les infinis situés dans l'intérieur du contour.

La démonstration *nouvelle* que M. Frontera donne de cette formule remarquable est très-simple. Il considère d'abord le cas où il n'y a dans le contour aucun infini de la fonction; il suppose ensuite que le contour se rétrécisse d'une manière continue, suivant une certaine loi, qui rend l'arc s fonction d'une nouvelle variable indépendante t. La différentiation sous le signe, et cette simple remarque que la fonction étant bien déterminée reprend sa valeur quand on revient au point de départ, suffisent pour démontrer que l'intégrale est indépendante du contour considéré. D'ailleurs cette intégrale est évidemment nulle lorsque le contour se réduit à un point : elle est donc toujours nulle, tant qu'on n'a atteint aucun point pour lequel la fonction devienne infinie.

Ce premier cas établi, on suppose que le contour renferme un point racine z_1. La fonction étant développée suivant les puissances ascendantes de $z - z_1$, l'intégrale proposée se partage en plusieurs autres qui s'annulent toutes, à l'exception d'une seule dont on trouve facilement la valeur.

5. La manière dont M. Frontera considère la proposition fondamentale présente une innovation. Au lieu de faire, avec M. Cauchy,

$$z = x + iy,$$

il pose

$$z = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

A la vérité, le théorème n'acquiert pas plus de généralité, puisqu'on obtiendrait la même intégrale en posant

$$z = x + iy,$$

et en suivant un contour différent du premier; mais on a l'avantage de pouvoir déduire du même contour une infinité de résultats en modifiant les fonctions φ et ψ.

6. Dans le § IV (13-17), M. Frontera examine avec soin le cas totalement omis par M. Cauchy, où la fonction devient infinie sur le contour même. Si l'infini considéré est multiple, l'intégrale est infinie ou indéterminée; ce cas n'offre aucun intérêt. Si l'infini est simple, l'intégrale est encore indéterminée; mais sa valeur principale est donnée par une formule remarquable qui mérite d'être connue.

7. Jusque-là on n'a qu'un théorème très-beau, très-général, mais on ne voit pas encore ce qu'il peut produire. Le § V (18-22) va nous montrer sa fécondité. De son application à des contours particuliers, naissent tout d'abord dix formules générales, dont chacune constitue à elle seule un théorème important. Ces formules à leur tour en produisent d'autres, et nous fournissent, § VI (22-28), 1° des intégrales définies tant qu'on en veut; 2° la décomposition des fractions rationnelles en fractions plus simples; 3° le moyen de développer des fonctions en séries, etc., etc.

8. Certaines intégrales deviennent indéterminées lorsque la fonction sous le signe passe par l'infini dans les limites de l'intégration; elles perdent alors toute signification précise, et, quoiqu'on puisse calculer leur valeur principale, comme celle-ci dérive d'un rapport arbitraire établi entre des quantités indépendantes, on est porté à ne voir là qu'un objet de pure curiosité. Aussi a-t-on dû souvent se demander : Mais à quoi donc servent les valeurs principales des intégrales définies singulières? M. Frontera va répondre à cette question, § VII (28–29), et nous montrer, à l'exemple de M. Cauchy, qu'elles ont leur utilité, du moins en analyse. Quelques-unes des formules précédentes donnent les valeurs principales de certaines intégrales indéterminées; ces valeurs pouvant, d'un autre côté, s'exprimer à l'aide d'intégrales définies parfaitement déterminées, il en résulte qu'on connaît ces dernières. C'est ainsi que l'on trouve

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1 - x}\, dx = \pi \cot a\pi.$$

9. L'auteur, dans le § VIII (29-32), déduit d'une formule précédente la série de Mac-Laurin; le théorème de M. Cauchy sur la convergence de cette série; un théorème plus général de M. Laurent; le développement des fonctions périodiques en séries de sinus et de cosinus.

10. Tous les géomètres connaissent les belles formules de Laplace et de Lagrange, pour le développement des fonctions implicites; mais leur démonstration et leur emploi donnent lieu à quelques difficultés, que M. Frontera nous paraît avoir complétement vaincues, § IX (33-40). Il commence par déduire, du théorème fondamental, une formule dont celles de Laplace et de Lagrange ne sont que des cas particuliers. c étant un contour fermé,

$$\Pi(z) + \theta\varpi(z) = 0, \tag{1}$$

une équation où le module de $\frac{\theta \varpi(z)}{\Pi(z)}$ est constamment inférieur à 1 pour tous les points du contour, on arrive à ce théorème remarquable :

Le nombre des racines de l'équation (1) *est égal à celui des racines de l'équation*

(2) $$\Pi(z) = 0,$$

comprises dans le contour.

Cela posé, si F (z) est une fonction quelconque, assujettie à ne pas devenir infinie dans le contour considéré, et qui ait une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z; si $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont m racines de l'équation (1), comprises dans le contour; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines de l'équation (1), comprises dans le même contour, on aura

$$\sum_{n=1}^{n=m} \mathrm{F}(z_n) = \sum_{n=1}^{n=m} \mathrm{F}(\alpha_n) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-\theta)^n}{n} \int_0^c \mathrm{F}'(z) \left(\frac{\varpi z}{\Pi z}\right)^n \frac{dz}{ds} ds.$$

La formule de Lagrange est comprise dans cette dernière, en posant

$$\Pi(z) = z - \alpha_1, \quad m = 1.$$

M. Frontera montre que la série de Lagrange ne donne pas toujours le développement de la plus petite racine, contrairement à l'assertion de l'illustre auteur (*). Si, pour une valeur donnée de θ, la série est convergente, et si l'on peut tracer un contour comprenant le point qui répond à α_1 et tel que, pour tous ses points, le module de $\frac{\theta \varpi(z)}{z - \alpha_1}$ soit inférieur à 1, on est assuré de deux choses : 1° que l'équation

$$z = \alpha_1 + \theta \varpi(z)$$

n'a qu'une seule racine comprise dans ce contour; 2° que

(*) L'observation est de M. Félix Chio, de Turin. (*Comptes rendus*, 1844, 2me semestre, page 556.)

la série exprime le développement de cette racine. Dans le cas où l'on ne saura pas tracer un pareil contour, on ne connaîtra pas ce que la série de Lagrange représente.

Ce paragraphe se termine par un moyen d'approcher indéfiniment des racines d'une équation, quand ces racines sont séparées, et par une méthode due à M. Cauchy, pour calculer une limite supérieure du reste dans la série de Lagrange.

11. Nous regrettons que le cadre de ce Journal ne nous permette pas d'entrer dans plus de détails ; mais ce que nous avons dit suffit pour montrer que la Thèse de M. Frontera n'est pas, comme il arrive quelquefois à ces sortes d'ouvrages, une banale amplification sur un sujet rebattu.

L'auteur, qui paraît très-bien connaître les méthodes de M. Cauchy, les expose avec beaucoup de clarté, y ajoute quelquefois, et leur donne, dans tous les cas, le dernier degré d'évidence par une discussion approfondie.

Il nous reste à émettre un vœu qui sera partagé, sans doute, par tous les amis de la science. Une thèse se distribue d'ordinaire à quelques parents et amis, cercle toujours restreint. Dans la plupart des cas, rien de mieux ; mais le remarquable écrit de M. Frontera mérite une publicité plus étendue : avec quelques additions, il pourrait tenir lieu d'un Traité élémentaire sur le calcul des résidus. Il y a longtemps qu'un pareil ouvrage est réclamé par les professeurs qui désirent de connaître cette partie des travaux de M. Cauchy : chose difficile, souvent même impossible à beaucoup d'entre eux. Ce n'est pas que notre grand géomètre cache ses découvertes, loin de là ; mais le moyen qu'il emploie pour les communiquer au public ne nous paraît pas des mieux choisis : si belle que soit une théorie, elle perd beaucoup de son charme, et il est bien difficile de s'en rendre un compte exact, quand il faut aller en chercher les morceaux dans vingt endroits différents. D'ailleurs les volumineux recueils où sont *éparpillés* les Mémoires sans nombre de M. Cauchy, ne sont pas à la portée de tout le monde, et ceux même qui peuvent les consulter n'en sont pas souvent plus avancés, faute d'un catalogue qui les guide et leur permette de suivre, sans s'égarer, la pensée du maître.

Nous espérons que M. le D^r Frontera voudra bien, dans l'intérêt de la science, accéder à notre vœu, et que sa Thèse viendra bientôt augmenter le nombre des savants ouvrages édités par M. Bachelier (*).

E. PROUHET,
Ancien professeur aux lycees d'Auch et de Cahors,
Maître de conférences au collège Rollin.