DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1849 (voir t. X, p. 261)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 66-72

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__66_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1849

(voir t. X, p. 261),

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

PREMIÈRE QUESTION. — *Étant données une surface, et par chaque point de cette surface une droite qui fait avec les axes rectangulaires des coordonnées, des angles dont les cosinus sont des fonctions continues des coordonnées de ce point, trouver la condition pour qu'il existe une surface normale à toutes ces droites.*

Si l'on prend sur chacune des droites, que nous désignerons par D, à partir du point M où elle perce la surface donnée S, et du même côté, une longueur $Mm = r$ qui soit une fonction continue quelconque des coordonnées x, y, z de M, le lieu géométrique des points m sera une surface S'. En effet, X, Y, Z désignant les cosinus donnés en fonction de x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées de m, on a

$$(1)\qquad \xi - x = rX, \quad \eta - y = rY, \quad \zeta - z = rZ;$$

et, par l'élimination de x, y, z entre ces trois équations et celle de la surface S, on trouvera, généralement, une équation en ξ, η, ζ, qui représentera une surface.

Pour que cette surface S' soit normale aux droites D, il faut et il suffit que les valeurs de ξ, η, ζ, en x, y, z, déterminées par les équations (1) et par celle de la surface S, satisfassent à l'équation

$$(2)\qquad (\xi - x)\,d\xi + (\eta - y)\,d\eta + (\zeta - z)\,d\zeta = 0.$$

Or les équations (1) donnent

$$r^2 - (\zeta - x)^2 - (\eta - y)^2 - (\zeta - z)^2 = 0,$$

de laquelle on tire, en différentiant,

$$\begin{aligned} r\,dr &- (\xi - x)(d\xi - dx) - (\eta - y)(d\eta - dy) \\ &- (\zeta - z)(d\zeta - dz) = 0\,; \end{aligned}$$

cette relation se réduit, d'après l'équation (2), à

$$r\,dr + (\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0\,;$$

et l'on a, enfin,

$$(3) \qquad dr + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0,$$

par la substitution de $r\mathrm{X}, \ldots,$ à $\xi - x, \ldots,$ suppression faite du facteur commun r.

Donc, pour que la surface S' soit normale aux droites D, il faut que r satisfasse à l'équation (3), eu égard à celle de la surface S; et l'on voit, sans difficulté, que cette condition est suffisante, en remontant de l'équation (3) à l'équation (2).

Cela étant posé, si nous considérons maintenant r comme une inconnue, la condition demandée consiste évidemment en ce qu'on puisse trouver une valeur de r qui satisfasse à l'équation (3), en tenant compte de celle de la surface S; et, par conséquent, c'est une condition d'intégrabilité.

Il peut se présenter deux circonstances différentes, que nous allons examiner successivement.

Lorsque l'équation de la surface est soluble par rapport à une des coordonnées, z par exemple, et que l'on en tire

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

p, q étant des fonctions de x, y; l'équation (3) se ramène à

$$dr + (\mathrm{X}_{,} + p\mathrm{Z}_{,})\,dx + (\mathrm{Y}_{,} + q\mathrm{Z}_{,})\,dy = 0,$$

$X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ étant ce que deviennent X, Y, Z par la substitution à z de sa valeur en x, y; et, pour que cette dernière équation soit intégrable, il faut qu'on ait

$$D_y(X_{,} + pZ_{,}) = D_x(Y_{,} + qZ_{,}).$$

Lorsque l'équation de la surface S n'est soluble par rapport à aucune des coordonnées, on aura une équation d'un degré supérieur au premier, ou même transcendante par rapport à dx, dy, dr, en éliminant z et dz entre l'équation (3), celle de S et sa différentielle première. Si l'équation finale est transcendante, on ne lui reconnaît aucun sens; si elle est algébrique, il faut, pour qu'elle en ait un, qu'elle soit décomposable en équations du premier degré par rapport aux différentielles. Et cependant, quand l'équation finale est transcendante, ou qu'elle est algébrique, d'un degré supérieur au premier et indécomposable, il peut se faire qu'il existe une surface normale aux droites D : ainsi, par exemple, cela sera évidemment si $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte, quelle que soit d'ailleurs la surface S.

Ce qu'il faut nécessairement, comme nous l'avons indiqué d'abord, pour qu'il y ait une surface normale aux droites D, c'est que l'équation (3) soit intégrable eu égard à celle de S; et, par conséquent, que le produit du produit du premier membre de l'équation (3) par une certaine fonction de r, x, y, z soit, en tenant compte de l'équation de S, une différentielle exacte. Or, cela exige évidemment que le trinôme $X dx + Y dy + Z dz$ satisfasse de la même manière à cette condition; mais il faut bien qu'il la remplisse, abstraction faite de l'équation de S, lorsqu'elle ne peut servir à chasser z et dz, ce qui est le cas dont il s'agit maintenant. Supposons donc que le produit du trinôme par u, qui pourrait contenir r, soit une différentielle exacte, et représentons l'intégrale par U, de sorte que l'équation (3) revienne à

$$(4) \qquad u\,dr + d\mathrm{U} = 0.$$

On a alors entre x, y, z, U, u et r, deux équations, savoir : l'intégrale de la précédente et l'équation de la surface S, et u, U sont des fonctions déterminées de x, y, z ; par conséquent, on peut considérer x, y, z, U comme des fonctions de u, r qui resteraient indépendantes l'une de l'autre. En posant, d'après cela,

$$\mathrm{U} = \psi(r, u),$$

d'où

$$d\mathrm{U} = \frac{d\psi}{dr}dr + \frac{d\psi}{du}du,$$

l'équation (4) devient

$$\left(u + \frac{d\psi}{dr}\right)dr + \frac{d\psi}{du}du = 0,$$

qui ne peut subsister, à cause de l'indépendance de u, r, sans que l'on n'ait séparément

$$u + \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{d\psi}{du} = 0.$$

D'après la seconde de ces équations, U ne doit dépendre que de r, et, d'après la première, r est une fonction de u; donc U doit être une fonction de u. On verra aisément si cette condition est remplie, après avoir calculé u et U d'après le trinôme $\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz$; car, si l'on égale ces fonctions à deux lettres α, β, puis qu'on élimine deux des coordonnées x, y, z entre les deux équations ainsi formées et l'équation de la surface S, il sera nécessaire et suffisant, pour cela, que l'équation finale ne contienne pas la troisième coordonnée, mais seulement α et β.

Enfin, cette dernière condition forme, avec celle de l'intégrabilité du trinôme, une condition complexe évidemment suffisante pour qu'il y ait une surface normale aux droites D; car, si $U = \varphi(u)$, on aura

$$dr = -\frac{\varphi'(u).du}{u},$$

de sorte que r se trouvera par une simple quadrature.

La discussion précédente s'applique d'ailleurs évidemment au cas particulier que nous avons d'abord examiné; et, par conséquent, la réponse à la question proposée peut être généralement formulée ainsi :

Il faut et il suffit que le trinôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ *satisfasse à la condition connue d'intégrabilité des différentielles à trois varibles, et que le facteur propre à le rendre intégrable soit, en vertu de l'équation de la surface donnée* S, *une fonction de l'intégrale.*

S'il existe une surface normale aux droites D, il y en a une infinité qui sont deux à deux équidistantes, puisque la valeur de r est de la forme

$$r = \text{const.} + F(x, y, z).$$

Enfin, il résulte de cette analyse, qu'un trinôme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ étant donné, s'il y a, pour une certaine surface, un système de droites menées par tous ses points, et faisant avec les axes des coordonnées rectangulaires des angles dont les cosinus soient les rapports de X, Y, Z à $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, qui puissent être coupées normalement par une autre surface, ce trinôme satisfera à la condition d'intégrabilité (*).

Exemples auxquels les méthodes indiquées pour trouver r *s'appliquent.* 1°. Les cosinus sont proportionnels à y, x, $2z$, et la surface S est l'hyperboloïde à une nappe

(*) Ce théorème diffère de celui de M. Cauchy sur le même sujet.

représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 3z^2 - xy = 0.$$

2°. Les cosinus sont proportionnels à x^2, y^2, z^2, et la surface S est représentée par l'équation

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^4}} = a.$$

Les deux méthodes peuvent être employées pour le premier de ces exemples; mais la seconde méthode seulement s'applique au second.

Deuxième question. — *Un système de rayons lumineux normaux à une même surface, se réfléchissent sur une surface donnée. Démontrer que les rayons réfléchis sont aussi normaux à une même surface* (*).

Ces derniers rayons sont ceux dont la réflexion est régulière.

Soient :

M un point de la surface réfléchissante, et MN la normale en ce point;

MI et MR un rayon incident en M et le rayon réfléchi correspondant;

(α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, et (λ, μ, ν) les angles qui déterminent la direction de MI, MR et MN, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; enfin, ω les angles égaux IMN et RMN.

Si l'on mène à Ox, dans le sens de cet axe, la parallèle MA, que l'on décrive une sphère de M comme centre, avec un rayon égal à l'unité de longueur, et qu'on joigne deux à deux par des arcs de grand cercle les points A, I, R, N, où cette sphère coupe MA, MI, MR, MN, on a un triangle sphérique dont la médiane AN et les côtés

(*) Théorème de Malus, généralisé par M. Bertrand.

sont représentés par λ, α, α', 2ω, et ce triangle donne

$$\cos\alpha' = 2\cos\lambda.\cos\omega - \cos\alpha,$$

par le théorème sur les médianes des triangles sphériques analogue au théorème sur les médianes des triangles rectilignes (*).

On a, de la même manière,

$$\cos\beta' = 2\cos\mu.\cos\omega - \cos\beta,$$
$$\cos\gamma' = 2\cos\nu.\cos\omega - \cos\gamma.$$

Soient encore :

x, y, z les coordonnées de M;

Et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ celles d'un point infiniment voisin de M sur la surface réfléchissante.

D'après l'équation connue

$$\cos\lambda.dx + \cos\mu.dy + \cos\nu.dz = 0,$$

et d'après celles qui précèdent, on a l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha'.dx + \cos\beta'.dy + \cos\gamma'.dz \\ &= -(\cos\alpha.dx + \cos\beta.dy + \cos\gamma.dz), \end{aligned}\right.$$

de laquelle se déduit immédiatement la démonstration du théorème.

En effet, les rayons (MI) étant normaux à une même surface, le trinôme $\cos\alpha.dx + \cos\beta.dy + \cos\gamma.dz$, dans lequel les cosinus peuvent être considérés comme des fonctions de x, y, z, remplit les conditions voulues pour qu'il y ait une surface normale à ces rayons; donc, d'après l'équation (1), le trinôme $\cos\alpha'.dx + \cos\beta'.dy + \cos\gamma'.dz$, dans lequel les cosinus sont de même des fonctions de x, y, z, remplit aussi ces conditions, et il existe, par conséquent, une surface normale aux rayons (MR), quelle que soit la surface réfléchissante.

(*) « La somme des cosinus de deux côtés d'un triangle sphérique est » égale à deux fois le produit du cosinus de la moitié du troisième côté par » celui de l'arc qui joint le milieu de ce côté au sommet opposé. »