NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON DE CHAMP

Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable (voir t. X, p. 408)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 62-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__62_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE ELLIPSE FIXE ET A UN CERCLE VARIABLE

(voir t. X, p 408),

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingenieur des Ponts et Chaussees.

1. *Lemme.* (x, y), (x', y'), (ξ, η) étant les coordonnées respectives de trois points, si l'on a

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi} = \frac{y-\eta}{y'-\eta},$$

les trois points sont en ligne droite.

2. Soit

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux. Transformons cette ellipse *homographiquement* (*Nouvelles Annales*, t. II, p. 416, et t. V, p. 497), au moyen des deux formules

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \xi + \frac{x'-\xi}{\lambda\left(\frac{x'}{p} + \frac{y'}{q} - 1\right) + 1}, \\ y &= \eta + \frac{y'-\eta}{\lambda\left(\frac{x'}{p} + \frac{y'}{q} - 1\right) + 1} \end{aligned} \right.$$

où x', y' sont les nouvelles coordonnées; on suppose que les axes restent les mêmes : ξ, η, λ sont trois constantes arbitraires; p, q deux constantes données. Avant de faire les substitutions, il faut remarquer que :

1°. Les deux points correspondants (x, y), (x', y')

et le point (ξ, η) sont toujours en ligne droite, car

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi} = \frac{y-\eta}{y'-\eta} \text{ (lemme)};$$

donc le point (ξ, η) est un *centre d'homologie* par rapport à l'ellipse donnée et sa transformée, et ce point est le point de rencontre des tangentes communes, réelles ou imaginaires.

2°. Toutes les transformées passent par les deux points d'intersection (réels ou imaginaires) de l'ellipse donnée avec la droite donnée

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0;$$

car, pour ces deux points, on a

$$x = x', \quad y = y'.$$

Substituant les valeurs de x, y dans l'équation (1), on trouve, pour équation de la conique transformée,

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Fz' + F = 0,$$

$$A = \frac{\lambda^2}{q^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\eta}{b^2 q} + \frac{1}{b^2},$$

$$C = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\xi}{a^2 p} + \frac{1}{a^2},$$

$$B = \frac{2\lambda}{pq}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + \frac{q\eta}{b^2}\right],$$

$$D = -\frac{2\lambda}{q}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{q\eta}{b^2} + 1\right],$$

$$E = -\frac{2\lambda}{p}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + 1\right],$$

$$F = -\lambda^2\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + 2\lambda - 1.$$

3. Si l'on veut que la transformée devienne un cercle, il faut écrire $A = C$ et $B = 0$; éliminant λ entre ces

deux équations, on obtient, réductions faites,

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{q^2}{b^2}\right)} - \frac{\eta^2}{\left(\frac{p^2}{a^2}\right)} = \frac{(a^2 - b^2)}{\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right)} \ (*).$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. *Étant donnés une ellipse et un cercle variable, ayant deux points fixes (réels ou imaginaires) en commun avec l'ellipse, le lieu du centre d'homologie est une hyperbole confocale.*

Observation. Si le rapport $\frac{p}{q}$ est constant, on a toujours la même hyperbole. Ainsi, le lieu géométrique est le même pour toutes les droites de même direction communes à l'ellipse et au cercle variable, résultat trouvé d'une autre manière (*Nouvelles Annales,* t. X, p. 408).

Observation. Si la conique donnée est une hyperbole, le lieu géométrique devient une ellipse homofocale.

Lorsque la conique donnée est une parabole, l'analyse précédente est encore applicable, mais en partant de l'équation ordinaire de la parabole. On trouve alors que le lieu cherché est une parabole homofocale égale à la parabole donnée et tournée dans un sens opposé.

4. *Remarque.* La méthode dont j'ai fait usage ne donne pas tous les points de rencontre des tangentes indistinctement. En effet, elle suppose essentiellement que la courbe proposée et sa transformée sont l'une et l'autre dans le même angle ou dans les angles opposés des tangentes communes. Dans le cas de quatre tangentes réelles, il n'y a que deux points qui satisfassent à cette condition, et ce sont ces deux points qui appartiennent au lieu trouvé ci-dessus.

Les autres points d'intersection sont au nombre de

(*) Hyperbole homofocale à l'ellipse donnee.

quatre, et il est toujours possible d'exprimer, au moyen du paramètre auxiliaire λ, les coordonnées du lieu de chacun de ces points. Car, à chaque valeur de λ correspondent, sur l'hyperbole, deux points S', S'', dont on peut déterminer les coordonnées ξ', η', ξ'', η'', et si, de chacun de ces points, on mène des tangentes T'_1, T'_2, T''_1, T''_2 à l'ellipse, la combinaison des équations de ces tangentes, prises deux à deux, savoir: $T'_1 T''_1$, $T'_1 T''_2$, $T'_2 T''_1$, $T'_2 T''_2$, donnera les coordonnées des nouveaux points cherchés en fonction de λ.

Je terminerai par faire observer que la même méthode s'applique à des courbes d'un ordre quelconque.

Note. 1°. La méthode est d'une extrême fecondité; à toutes les relations qu'on peut établir entre λ, ζ, η, correspondent autant de théorèmes sur les centres de similitude. Par exemple, posons $D = E = 0$; nous obtiendrons ce théorème: *Étant données une conique fixe et une conique variable, ayant deux points (réels ou imaginaires) en commun avec la conique fixe, et ayant le même centre, le lieu des centres de similitude est un diamètre conjugué à la corde commune.*

2°. Soient $f = 0$, $F = 0$ les équations de deux coniques, exprimées en coordonnées x, y; et p, q, r trois fonctions entières lineaires en x'_1, y'; faisons $x = \frac{p}{r}$, $y = \frac{q}{r}$, et substituons ces valeurs dans les équations données, nous obtiendrons deux nouvelles coniques $f_1 = 0$, $F_1 = 0$, exprimées en x', y' et renfermant neuf constantes arbitraires, mais qui se reduisent à huit rapports. Pour que les nouvelles coniques deviennent des cercles, il faut écrire quatre équations; mais trois de ces équations ne renfermant pas les variables x', y' qui entrent dans les fonctions p, q, r, il ne reste que cinq rapports qui se réduisent par changements à quatre; de sorte qu'on a quatre équations à quatre inconnues. On voit donc que, *généralement parlant*, on peut transformer deux coniques en deux cercles; c'est là un des beaux théorèmes de M. Poncelet. Les coefficients de x', y' dans p, q, r étant les seules quantités qui soient determinées, la transformation peut se faire d'une infinité de manières.

3°. La belle analyse de M. Breton, qui résout si facilement un problème difficile, est une millième preuve que, pour l'algèbre comme pour tout autre instrument, l'exécution dépend de l'artiste, et lorsqu'un problème semble être inaccessible à l'analyse, il faut se rappeler ce mot d'Euler: *Non tam analysi quam analystæ imputandum est.*

Dans un autre travail, que nous donnerons bientôt, M. Breton démontre que le théorème de géométrie est un corollaire du théorème suivant de M. Steiner : *Les sommets des cônes droits circonscrits à un ellipsoïde sont sur une hyperbole.*