A. NÉVROUZIAN

Démonstration du théorème donné au concours de mathématiques élémentaires en 1849 (voir t. VIII, p. 315, 369 et 401)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 49-52

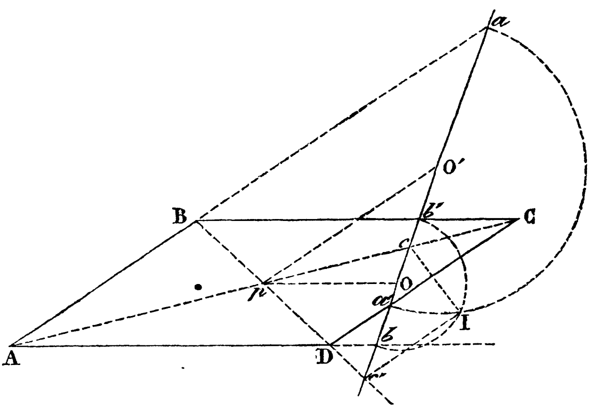
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__49_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DONNÉ AU CONCOURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES EN 1849

(voir t. VIII, p. 315, 369 et 401);

PAR M. A. NÉVROUZIAN (Arménien).

Étant donné un quadrilatère ABCD; *si une transversale rencontre les deux côtés opposés* AB, CD, *en deux points a, a'; les deux autres côtés* AD, BC, *en b et b', et les deux diagonales* AC, BD, *en c et c'; les circonférences de cercle décrites sur les trois segments aa', bb', cc', comme diamètres, se couperont, deux à deux, dans les mêmes points.*



Démonstration. Soit I un des points d'intersection des deux circonférences décrites sur les segments aa' et bb'; nous allons démontrer que l'angle $c\mathrm{I}c'$ est droit; d'où l'on conclura que la circonférence décrite sur cc', comme diamètre, passe par le point I.

Que, par le point d'intersection p des deux diagonales on mène la droite pO parallèle aux côtés AD, BC, et la droite pO' parallèle aux deux côtés AB, DC.

Le triangle cAb, coupé par pO parallèle à la base Ab, donne

$$\frac{Ob}{Oc} = \frac{pA}{pc};$$

et le triangle cAa, coupé par pO', donne

$$\frac{pA}{pc} = \frac{O'a}{O'c}.$$

Donc

$$\frac{Ob}{Oc} = \frac{O'a}{Oc}, \quad \text{ou} \quad \frac{Oc}{O'c} = \frac{Ob}{O'a}.$$

Or O' est le milieu du segment aa', et l'on a

$$O'a = O'I,$$

et, pareillement,

$$Ob = OI;$$

donc

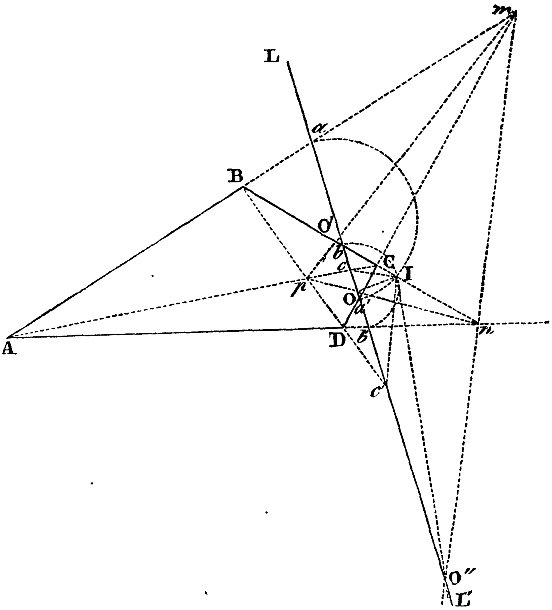
$$\frac{Oc}{O'c} = \frac{OI}{O'I}.$$

Cette équation prouve que la droite Ic est la bissectrice de l'angle OIO'.

Or, ce qui se trouve démontré à l'égard du point c appartenant à la diagonale AC, s'applique au point c' de l'autre diagonale BD, c'est-à-dire que la droite Ic' divise en deux également le supplément de l'angle OIO'. Donc les deux droites Ic, Ic' sont rectangulaires. Ce qu'il fallait démontrer. Donc, etc.

Généralisation du théorème. La démonstration précédente peut être appliquée, par une généralisation convenable, au cas d'un quadrilatère quelconque.

Soit I un des points d'intersection des circonférences décrites sur les deux segments aa', bb', comme diamètres; je vais faire voir que l'angle cIc' est droit.



Soient m, n, p les points de rencontre des côtés opposés (AB, DC), (BC, AD) et des deux diagonales (AC, BD); et soient O, O', O'' les points où les trois droites np, mp et mn rencontrent la transversale LL'.

Le segment aa' est divisé harmoniquement aux points O', O'', parce que les quatre droites Am, pm, Dm et nm forment un faisceau harmonique. Il s'ensuit que l'on a, dans le cercle aIa',

$$\frac{O'I}{O''I} = \frac{O'a}{O''a}.$$

On a de même, à l'égard du segment bb',

$$\frac{O''I}{OI} = \frac{O''b}{Ob}.$$

Multipliant membre à membre, on obtient

$$(1)\qquad \frac{O'I}{OI} = \frac{O'a}{O''a} \cdot \frac{O''b}{Ob}.$$

Or on a

$$(2)\qquad \frac{O'a}{O''a} \cdot \frac{O''b}{Ob} \cdot \frac{Oc}{O'c} = 1;$$

car les trois triangles aAb, bAc et cAa, coupés respectivement par les transversales mn, np et pm, donnent lieu aux trois équations

$$\frac{ma}{mA} \cdot \frac{nA}{nb} \cdot \frac{O''b}{O''a} = 1,$$

$$\frac{mA}{ma} \cdot \frac{pc}{pA} \cdot \frac{O'a}{O'c} = 1,$$

$$\frac{nb}{nA} \cdot \frac{pA}{pc} \cdot \frac{Oc}{Ob} = 1,$$

qui, multipliées membre à membre, donnent cette équation (2).

De celle-ci et de l'équation (1), on conclut

$$\frac{O'I}{OI} = \frac{O'c}{Oc}.$$

Cette équation prouve que la droite Ic est la bissectrice de l'angle OIO'. Donc, puisque les deux points c, c' divisent harmoniquement le segment OO', la droite Ic' est la bissectrice du supplément de l'angle OIO'; donc les deux droites Ic, Ic' sont rectangulaires, et, par conséquent, le point I est sur la circonférence décrite sur $c'c$ comme diamètre. C. Q. F. P.