NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGELO GENOCCHI

Solution de la question 244

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 453-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__453_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 244

(voir t X p 358)

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

THÉORÈME. *Dans un produit de n facteurs monômes, on ne peut changer que $2^{n-1}-1$ fois les signes des facteurs, soit en totalité, soit en partie, sans changer le signe du produit.*

Démonstration. Le signe du produit ne change pas, si les facteurs qui changent de signe sont en nombre pair. Mais deux facteurs sur n peuvent être choisis de $\frac{n(n-1)}{1.2}$ manières; quatre facteurs peuvent être choisis de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2\,3.4}$ manières; et ainsi de suite. D'ailleurs, on a

$$1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2\,3.4}+\ldots$$
$$=\frac{(1+1)^n+(1-1)^n}{2}=2^{n-1};$$

donc les signes des facteurs peuvent être changés de $2^{n-1}-1$ manières.

Observation. M. Casimir Rey démontre le même théorème par des considérations combinatoires.