

P.-A.-G. COLOMBIER

**Seconde démonstration du théorème
118 (voir t. V, p. 167)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 451-453

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__451_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 118

(voir t. V, p. 167),

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
 Professeur de Mathématiques, à Paris.

THÉORÈME. Si x désigne l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont y et z sont les deux côtés de l'angle droit, je dis qu'on aura

$$x^m > \text{ ou } < y^m + z^m,$$

suivant que la valeur algébrique de m est plus grande ou plus petite que 2.

Je ferai remarquer que ce théorème a été démontré, il y a quelques années, dans les *Nouvelles Annales*, t. V, p. 413, 479 et suivantes. On peut, je crois, le démontrer beaucoup plus simplement ainsi qu'il suit.

Première démonstration. On a, par hypothèse,

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

m désignant une grandeur quelconque; si nous multiplions les deux membres de cette égalité par x^{m-2} , nous aurons

$$(1) \quad x^m = y^2 x^{m-2} + z^2 x^{m-2}.$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, x étant plus grand que y et que z ,

$$y^2 x^{m-2} + z^2 x^{m-2} > y^2 y^{m-2} + z^2 z^{m-2},$$

et, par suite,

$$x^m > y^m + z^m;$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2. Alors écrivons l'égalité (1) sous la forme

$$x^m = y^2 \frac{1}{x^2-m} + z^2 \frac{1}{x^2-m},$$

et, comme on a évidemment

$$y^2 \frac{1}{x^2-m} + z^2 \frac{1}{x^2-m} < y^2 \frac{1}{y^2-m} + z^2 \frac{1}{z^2-m},$$

il s'ensuit que

$$x^m < y^m + z^m;$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Seconde démonstration. En désignant par a et b deux fractions proprement dites, posons

$$y = ax \quad \text{et} \quad z = bx;$$

d'où

$$(2) \quad y^m + z^m = x^m (a^m + b^m).$$

Si, dans cette égalité, on fait $m = 2$, on aura évidemment

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement moindres que a^2 et b^2 , on aura

$$a^m + b^m < 1,$$

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m > y^m + z^m.$$

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement plus grands que a^2 et b^2 , on a

$$a^m + b^m > 1,$$

(453)

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m < y^m + z^m.$$

Cas particuliers. Dans l'hypothèse où $m = 3$, on a

$$x^3 > y^3 + z^3.$$

Sous le point de vue géométrique, cette égalité montre que le cube construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus grand que la somme des cubes construits sur les deux côtés de l'angle droit.