NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A.-G. COLOMBIER

Seconde démonstration du théorème 118 (voir t. V, p. 167)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 451-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__451_0>

SECONDE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 118

(voir t V, p 167),

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur de Mathematiques, à Paris.

THÉORÈME. *Si x désigne l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont y et z sont les deux côtés de l'angle droit, je dis qu'on aura*

$$x^m > \quad \text{ou} \quad < y^m + z^m,$$

suivant que la valeur algébrique de m est plus grande ou plus petite que 2.

Je ferai remarquer que ce théorème a été démontré, il y a quelques années, dans les *Nouvelles Annales*, t. V, p. 413, 479 et suivantes. On peut, je crois, le démontrer beaucoup plus simplement ainsi qu'il suit.

Première démonstration. On a, par hypothèse,

$$x^2 = y^2 + z^2,$$

m désignant une grandeur quelconque; si nous multiplions les deux membres de cette égalité par x^{m-2}, nous aurons

$$x^m = y^2 x^{m-2} + z^2 . x^{m-2}. \tag{1}$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, x étant plus grand que y et que z,

$$y^2 x^{m-2} + z^2 x^{m-2} > y^2 . y^{m-2} + z^2 . z^{m-2},$$

et, par suite,

$$x^m > y^m + z^m;$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2. Alors écrivons l'égalité (1) sous la forme

$$x^m = y^2 \frac{1}{x^{2-m}} + z^2 \frac{1}{x^{2-m}},$$

et, comme on a évidemment

$$y^2 \frac{1}{x^{2-m}} + z^2 \frac{1}{x^{2-m}} < y^2 \frac{1}{y^{2-m}} + z^2 \frac{1}{z^{2-m}},$$

il s'ensuit que

$$x^m < y^m + z^m;$$

ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Seconde démonstration. En désignant par a et b deux fractions proprement dites, posons

$$y = ax \quad \text{et} \quad z = bx;$$

d'où

$$(2) \qquad y^m + z^m = x^m(a^m + b^m).$$

Si, dans cette égalité, on fait $m = 2$, on aura évidemment

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Cela posé, supposons d'abord que la valeur algébrique de m soit plus grande que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement moindres que a^2 et b^2, on aura

$$a^m + b^m < 1,$$

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m > y^m + z^m.$$

Supposons, en second lieu, que la valeur algébrique de m soit plus petite que 2; dès lors, a^m et b^m étant respectivement plus grands que a^2 et b^2, on a

$$a^m + b^m > 1,$$

et, par suite, la relation (2) donne

$$x^m < y^m + z^m.$$

Cas particuliers. Dans l'hypothèse où $m = 3$, on a

$$x^3 > y^3 + z^3.$$

Sous le point de vue géométrique, cette égalité montre que le cube construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus grand que la somme des cubes construits sur les deux côtés de l'angle droit.