NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CASIMIR REY

Solution de la question 250

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 449-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__449_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 250

(voir t XI, p 45),

PAR M. CASIMIR REY,
De l'Institution Barbet

1. *Lemme.* Si l'on porte sur une droite, à partir d'un point donné, les quatre racines des deux équations

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + p'x + q' = 0,$$

racines prises avec leurs signes, et si l'on a la relation $2(q + q') = pp'$, les quatre points ainsi déterminés sont en rapport harmonique.

2. THÉORÈME. *Quatre points étant donnés sur une droite, prenant ces points deux à deux, on obtient trois systèmes de deux couples chacun, et à chacun de ces systèmes correspond un couple de points simultanément harmoniques aux deux couples du système; les trois couples ainsi déterminés, pris deux à deux, sont harmoniques entre eux.* (OTTO HESSE.)

Démonstration. Soient quatre points consécutifs :

A, B, C, D sur une droite,		
P, Q deux points simult. harmon. aux points		A, B; C, D,
R, S	*Id.*	A, C; B, D,
T, V	*Id.*	A, D; B, C;

prenons un point O sur la droite; faisons

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad OD = d,$$

$$OP = p, \quad OQ = q, \quad OR = r, \quad OS = s, \quad OT = t, \quad OV = v.$$

En vertu du lemme, on a

$$(1)\qquad 2(ab+pq)=(a+b)(p+q),$$
$$(2)\qquad 2(cd+pq)=(c+d)(p+q),$$
$$(3)\qquad 2(ac+rs)=(a+c)(r+s),$$
$$(4)\qquad 2(bd+rs)=(b+d)(r+s).$$

Éliminant a entre les équations (1) et (3), on obtient

$$\begin{gathered}2(r+s)(bc+pq)+2(p+q)(rs-bc)\\ +(c-b)(r+s)(p+q)-4crs+4bpq=0;\end{gathered}$$

de même, en éliminant d entre les équations (2) et (4), on obtient

$$\begin{gathered}2(r+s)(bc+pq)+2(p+q)(rs-bc)\\ +(b-c)(r+s)(p+q)-4brs+4cpq=0.\end{gathered}$$

Soustrayant ces équations l'une de l'autre, et divisant le reste par $2(b-c)$, on a

$$(r+s)(p+q)=2(rs+pq).$$

Donc, d'après le lemme, les points R, S, P, Q sont en rapport harmonique; on trouve de même

$$\begin{gathered}(r+s)(t+v)=2(rs+tv),\\ (p+q)(t+v)=2(pq+tr).\quad \text{C. Q. F. D.}\end{gathered}$$

Corollaire. Les six points R, S, A, B, C, D sont en involution; de même le système T, V, A, B, C, D et encore quatre autres systèmes.

Note. M. Hesse fait un emploi très-ingénieux de ce problème pour la résolution des équations biquadratiques. (Journal de M. Crelle, t. XLI, p. 263; 1851.)