J. SYLVESTER

Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes (voir t. X, p. 258)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 434-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__434_1>

SUR UNE PROPRIÉTÉ NOUVELLE DE L'ÉQUATION QUI SERT A DETÉRMINER LES INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES

(voir t. X, p. 258);

PAR M. J. SYLVESTER,

Avocat, anciennement professeur à Londres.

---

1. *Note du rédacteur.* Cette propriété étant fondée sur les *déterminants,* nous croyons utile, pour les jeunes lecteurs du Journal, de donner quelques explications pré-

liminaires. Soient n^2 quantités quelconques disposées n à n sur n lignes horizontales et sur n *colonnes* verticales. Cette disposition est le *type* d'un déterminant *carré*, et lorsqu'on applique à ces quantités la règle connue de Cramer, pour former les dénominateurs, dans la résolution des équations du premier degré, on aura, en général, lorsqu'il n'y a lieu ni à réduction ni à annulation, une expression formée de $n!$ termes; c'est le *déterminant développé* ou la valeur du *déterminant*.

2. *Notation*. L'expression $a_{l,c}$, où les indices l, c peuvent avoir toutes les valeurs 1, 2, 3,..., n, indique un terme quelconque du type; la lettre l donne le quantième de la ligne, et la seconde lettre c le quantième de la colonne.

Lorsqu'on a deux types formés chacun de n^2 quantités, on peut représenter les termes généraux respectifs par $a_{l,c}$, $b_{l,c}$; et ainsi de suite.

3. *Multiplication de déterminant*. Pour fixer les idées, prenons $n = 3$, et écrivons les deux déterminants

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & \text{M} & & & \text{N} & \\
a_{1,1}, & a_{1,2}, & a_{1,3} & b_{1,1}, & b_{1,2}, & b_{1,3}, \\
a_{2,1}, & a_{2,2}, & a_{2,3} & b_{2,1}, & b_{2,2}, & b_{2,3}, \\
a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3} & b_{3,1}, & b_{3,2}, & b_{3,3}.
\end{array}$$

Faisons

$$A_{1,1} = a_{1,1}\ b_{1,1} + a_{2,1}\ b_{2,1} + a_{3,1}\ b_{3,1},$$
$$A_{2,1} = a_{1,1}\ b_{1,2} + a_{2,1}\ b_{2,2} + a_{3,1}\ b_{3,2},$$
$$A_{3,1} = a_{1,1}\ b_{1,3} + a_{2,1}\ b_{2,3} + a_{3,1}\ b_{3,3}.$$

On a formé $A_{1,1}$ en multipliant chaque terme de la première colonne du déterminant M par le terme correspondant de la première colonne du déterminant N; multipliant les termes de la première colonne de M avec chaque terme de la deuxième colonne de N, on a formé $A_{2,1}$, et de même de $A_{3,1}$; pour former $A_{1,2}$, $A_{2,2}$, $A_{3,2}$, on multiplie chaque terme de la seconde colonne de M successivement par les termes correspondants de la première, deuxième et troisième colonne de N; on forme ainsi le déterminant

$$\begin{matrix} A_{1,1}, & A_{1,2}, & A_{1,3}, \\ A_{2,1}, & A_{2,2}, & A_{2,3}, \\ A_{3,1}, & A_{3,2}, & A_{3,3}. \end{matrix}$$

C'est dans cette opération que consiste ce qu'on appelle la *multiplication de deux déterminants*. Quand on a trois déterminants, on peut former le produit des deux premiers, et ensuite multiplier ce produit par le troisième, et ainsi de suite. On ne parvient pas au même résultat en prenant les déterminants dans un ordre quelconque.

Exemple :

$$\text{determ.}\left\{\begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix} \times \begin{matrix} e, & f \\ g, & h \end{matrix}\right\} = \text{déterm.}\left\{\begin{matrix} ae + cg, & be + dg, \\ af + ch, & bf + dh\,; \end{matrix}\right.$$

$$\text{déterm.}\left\{\begin{matrix} e, & f \\ g, & h \end{matrix} \times \begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix}\right\} = \text{déterm.}\left\{\begin{matrix} ae + cg, & af + ch, \\ be + dg, & bf + dh. \end{matrix}\right.$$

Les déterminants ne sont pas les mêmes quant à la position; et si l'on multiplie par un troisième déterminant, on n'aura pas le même résultat, selon que l'on prend une forme ou l'autre.

Lorsque les déterminants sont égaux, le produit se nomme *élévation de puissance*.

Observation. Au lieu de multiplier *colonne* par *colonne*, on peut multiplier *ligne* par *ligne*; le mot *multiplier* étant pris dans le même sens que ci-dessus.

4. **Théorème.** *Soient les deux déterminants* $a_{r,s}$, $b_{r,s}$, *chacun de* n^2 *termes, formant le déterminant produit* $a_{l,c}$, $b_{l,c}$; *soient* M_1 *et* M_2 *les déterminants développés des deux facteurs, et* P *le déterminant développé du produit, on a*

$$P = M_1 M_2.$$

Si l'on a plusieurs déterminants M_1, M_2, M_3,..., M_r, *toujours de même espèce* (n^2), *on a*

$$P = M_1 M_2 M_3 \ldots M_r.$$

Si les déterminants sont égaux, on a

$$P = (M_1)^r.$$

Exemple · Soient

$$\text{déterminant}\left\{\begin{matrix} a, & b \\ c, & d \end{matrix}\right\} = M,$$

$$\text{déterminant}\left\{\begin{matrix} e, & f \\ g, & h \end{matrix}\right\} = N;$$

multipliant, on obtient le déterminant

$$\left.\begin{matrix} ae + cg, & be + dg \\ af + ch, & bf + dh \end{matrix}\right\} = P;$$

$$M = ad - bc,$$
$$N = eh - gf,$$
$$P = (ae + cg)(bf + dh) - (be + dg)(af + ch);$$

exécutant les multiplications, on a

$$P = MN.$$

5. *Déterminant symétrique.* Si, dans un déterminant $a_{l,c}$, on a

$$a_{l,c} = a_{c,l},$$

les termes en diagonale de gauche à droite sont uniques; tous les autres termes sont doubles et disposés symétriquement par rapport à la diagonale.

Exemple :

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ b, & d, & f, \\ c, & f, & e, \end{matrix}$$

représente un déterminant symétrique.

6. Théorème. *Le produit de déterminants symétriques est un déterminant symétrique.*

7. Théorème de M. Sylvester. *Soit le déterminant carré symétrique*

$$(\mathrm{M})\qquad \begin{cases} a_{1,1}, & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2},\ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n}, \end{cases}$$

dans lequel on a, d'après la définition,

$$a_{l,c} = a_{c,l}$$

Élevant le déterminant à la puissance p, on obtient le déterminant

$$(\mathrm{N})\qquad \begin{cases} \mathrm{A}_{1,1}, & \mathrm{A}_{1,2}, \ldots, & \mathrm{A}_{1,n}, \\ \mathrm{A}_{2,1}, & \mathrm{A}_{2,2},\ldots, & \mathrm{A}_{2,n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{A}_{n,1}, & \mathrm{A}_{n,2},\ldots, & \mathrm{A}_{n,n}; \end{cases}$$

et ce déterminant est symétrique aussi (§ 6) *par rapport à la diagonale* $\mathrm{A}_{1,1}, \mathrm{A}_{2,2},\ldots, \mathrm{A}_{n,n}$; *retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique de* (M) *la même quantité* λ, *on obtient le déterminant*

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2},\ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-\lambda,\ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2},\ldots, & a_{n,n}-\lambda. \end{cases}$$

Développant ce déterminant et ordonnant par rapport à λ, *on obtient une expression qui, étant égalée à zéro, donne l'équation*

$$(1)\qquad \lambda^n - f\lambda_{n-1} + g\lambda_{n-2} + \ldots (-1)^n t = 0;$$

équation qui a n racines réelles (voir t. X, p. 259).

Retranchant de chaque terme de la diagonale symétrique du déterminant (N) *la quantité* μ, *et opérant comme ci-dessus, on parvient à l'équation*

$$(2)\qquad \mu^n - \mathrm{F}\mu^{n-1} + \mathrm{G}\mu^{n-2} + \ldots (-1)^n \mathrm{T} = 0;$$

équation qui a aussi n racines réelles. Les racines de cette équation sont les racines de l'équation (1), *élevées chacune à la puissance p.*

Démonstration. Représentons par

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \ldots, \quad \rho_p$$

les p racines de l'équation $\rho^p - 1 = 0$. Écrivons le déterminant

$$\begin{array}{llll} a_{1,1} - \rho_q\lambda, & a_{1,2}, \ldots, & & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2} - \rho_q\lambda, \ldots, & & a_{2,n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, & & & a_{n,n} - \rho_q\lambda; \end{array}$$

et faisons q égal successivement à tous les nombres de la suite 1, 2, 3,..., p, on aura p déterminants; le produit de tous ces déterminants reste évidemment le même dans quelque ordre qu'on prenne ces déterminants, et, d'après les propriétés connues des racines de l'unité, tous les termes en ρ qui ne seront pas élevés à une puissance p disparaîtront, et λ accompagnant toujours ρ, il ne reste donc que des λ^p, et le déterminant-produit sera

$$(\mathrm{Q}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} A_{1,1} - \lambda^p, & A_{1,2}, & A_{1,3}, \ldots, & A_{1,n}, \\ A_{2,1}, \ldots, & A_{2,2} - \lambda^p, \ldots\ldots, & & A_{2,n}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ A_{n,1}, & A_{n,2}, \ldots\ldots, & & A_{n,n} - \lambda^p; \end{array} \right.$$

où, faisant abstraction de λ, on a le déterminant (N). Ainsi

$$\mu = \lambda^p. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

7. *Application.*

$$n = 2, \quad \text{et} \quad p = 2;$$

$$(\mathrm{M}) \qquad \text{determinant} \left\{ \begin{array}{ll} a, & b, \\ b, & c. \end{array} \right.$$

élevant ce déterminant au carré, on a

$$\text{(N)}\qquad \begin{cases} a^2 + b^2, & ab + bc, \\ ab + bc, & b^2 + c^2, \end{cases}$$

$$\text{(P)}\qquad \text{déterminant} \begin{cases} a - \lambda, & b, \\ b, & c - \lambda, \end{cases}$$

$$\text{(1)}\qquad \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0,$$

$$\text{déterminant} \begin{cases} a^2 + b^2 - \mu, & ab + bc, \\ ab + bc, & b^2 + c^2 - \mu, \end{cases}$$

$$\text{(2)}\quad \mu^2 - (a^2 + c^2 + 2b^2)\mu + (ac - b^2)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = \lambda^2.$$

Faisons

$$n = 2, \quad p = 3,$$

(M) ne change pas, et l'on a

$$\text{(N)}\qquad \begin{cases} a^3 + 2ab^2 + b^2c, & a^2b + abc + b^3 + bc^2, \\ a^2b + abc + b^3 + b^2c, & ab^2 + 2b^2c + c^3; \end{cases}$$

le déterminant (P) et l'équation (1) restent les mêmes; mais l'équation (2) devient

$$\mu^2 - (a^3 + c^3 + 3ab^2 + 3cb^2)\mu + (ac - b^2)^3 = 0$$

où

$$\mu = \lambda^3;$$

car, λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation (1), on a

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 = a^3 + c^3 + 3ab^2 + 3cb^2, \quad \lambda_1^3 + \lambda_2^3 = (ac - b^2)^3.$$

8. M. Sylvester fait observer que son théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, démontré par M. Borchardt, pour des déterminants quelconques, et qui devient le théorème démontré ci-dessus, lorsque le déterminant est symétrique (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 63; 1847).