Nouvelles annales de mathématiques

Sur les systèmes de courbes algébriques planes qui se coupent orthogonalement et sur leur confocalité ; d'après M. le professeur E.-E. Kummer

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 426-434

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__426_1>

SUR LES SYSTÈMES DE COURBES ALGÉBRIQUES PLANES QUI SE COUPENT ORTHOGONALEMENT ET SUR LEUR CONFOCALITÉ;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR E.-E. KUMMER.

(Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 5; 1847.)

1. Soit

$$(a) \qquad f(x, y, \alpha) = 0$$

une courbe plane algébrique de degré n en α, à coordonnées rectangulaires; α est un paramètre variable; soit (X, Y) un point quelconque dans le plan des courbes, la courbe (a) passera par ce point, si nous posons

$$f(X, Y, \alpha) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \ldots (\alpha - \alpha_n) = 0;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de l'équation, et fonctions de X, Y; à chacune de ces racines correspond une courbe donnée par l'équation (a), et ces n courbes passent par le point (X, Y); en les prenant deux à deux, on a $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes de deux courbes. Parmi ces systèmes, considérons ceux où les deux courbes se coupent orthogonalement. Supposons que ce soient les courbes correspondant aux racines α_1, α_2, et prenons l'équation

$$(a - \alpha_1)(a - \alpha_2) = 0,$$

ou bien

$$u\alpha^2 + v\alpha + w = 0;$$

u, v, w sont des fonctions généralement irrationnelles de X, Y. Divisant par u, et posant

$$\frac{v}{u} = 2z, \quad \frac{w}{u} = -z_1^2,$$

on a

(1) $$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0$$

(on verra plus loin pourquoi on introduit $+z_1^2$); z et z_1 sont des fonctions de X, Y ou de x, y, puisque la courbe (a) passe par le point (X, Y). Il s'agit de déterminer les fonctions z, z_1 de telle sorte, que les deux courbes (α_1, α_2) se coupent orthogonalement. Faisons

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dz_1 = p_1\,dx + q_1\,dy,$$

et différentions l'équation (1) par rapport à x et à y; nous en tirerons

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha_1 - q_1 z_1}.$$

A raison de l'orthogonalité, les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à α_1, α_2, multipliées ensemble, doivent donner -1; exécutant la multiplication, et remplaçant $\alpha + \alpha_1$ par $-2z$ et $\alpha_1\alpha_2$ par $-z_1^2$, on obtient

(3) $$z_1(p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2) - 2z(pp_1 + qq_1) = 0.$$

Si l'on pouvait intégrer généralement cette équation aux différences partielles, on aurait z et z_1 en fonction de x, y, et ces valeurs, étant mises dans l'équation (1), donneraient le système des couples de courbes à intersections orthogonales. Mais cette intégrale générale n'est pas encore trouvée; cherchons des solutions particulières.

2. Posons

(4) $$p^2 + q^2 - p_1^2 - q_1^2 = 0, \quad pp_1 + qq_1 = 0;$$

éliminant q_1, on a

$$q^2 = p_1^2.$$

Ainsi

$$p_1 = \pm q \quad \text{et} \quad q_1 = \mp p.$$

Différentiant la première de ces équations par rapport à y, et la seconde par rapport à x, on a

$$s_1' = \pm t, \quad s_1' = \mp r,$$

où r, s, t, r', s', t' sont, d'après les notations, les coefficients différentiels de z et x_1; donc

$$r + t = 0.$$

L'intégrale complète de cette équation est

(5) $$z = f(x+iy) + f(x-iy) - i\mathrm{F}(x+iy) + i\mathrm{F}(x-iy)$$

(Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 583, 2e édition; 1814).

On a

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{dz_1}{dy};$$

d'où l'on tire

(6) $$z_1 = if(x+iy) - if(x-iy) + \mathrm{F}(x+iy) - \mathrm{F}(x-iy).$$

On omet le double signe, qui n'importe pas à notre sujet;

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ces valeurs de z et z_1 satisfont à l'équation (3), et aussi à l'équation

$$\alpha^2 - 2\alpha z - z_1^2 = 0.$$

Posons

$$f(x+iy) = \frac{1}{2}(x+iy) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x+iy) = 0;$$

on obtient

$$\alpha^2 + 2\alpha x - y^2 = 0;$$

système de paraboles biconfocales.

Donnant à α des valeurs quelconques, on obtient des courbes dont les intersections sont ou réelles ou imaginaires, et aux points d'intersection on a toujours le produit des $\frac{dy}{dx}$ respectifs égal à -1 ; ce qui donne une véritable intersection orthogonale, lorsque l'intersection est réelle. Nous ne répéterons plus cette observation.

Si l'on pose

$$f(x+iy) = \frac{1}{2} a (x+iy)^m, \quad F(x+iy) = \frac{1}{2} b (x+iy)^n,$$

et passant aux coordonnées polaires

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

on arrive à l'équation suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + 2\alpha(a\rho^m \cos m\varphi + b\varphi^n \sin n\varphi) \\ \quad -(a\rho^m \sin m\varphi - b\rho^n \cos n\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

3. Passons à une autre intégrale particulière de l'équation (3). A cet effet, considérons z comme une fonction de z_1 et d'une nouvelle variable z_2 à déterminer ultérieurement ; faisons

$$dz_2 = p_2\, dx + q_2\, dy;$$

alors

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{dz}{dz_1} p_1 + \frac{dz}{dz_2} p_2, \quad \frac{dz}{dy} = q = \frac{dz}{dz_1} q_1 + \frac{dz}{dz_2} q_2.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation (3), on a

$$\left[z_1 \left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2 - z_1 - 2z\frac{dz}{dz_1}\right](p_1^2+q_1^2) + z_1\left(\frac{dz}{dz_2}\right)^2 (p_2^2+q_2^2)$$
$$+ z\left(z\frac{dz}{dz_1}\frac{dz}{dz_2} - z\frac{dz}{dz_2}\right)(p_1p_2+q_1q_2) = 0.$$

Si l'on pose

$$p_1p_2 + q_1q_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0$$

(système dont l'intégrale est connue), l'équation se réduit à

$$(8)\qquad z_1\left[\left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2+\left(\frac{dz}{dz_2}\right)^2-1\right]-2z\frac{dz}{dz_1}=0,$$

qui donne immédiatement l'intégrale particulière

$$2z=1-z_1^2-z_2^2;$$

d'où l'on déduit le nouveau système de courbes se coupant orthogonalement,

$$\alpha^2-2\alpha(1-z_1^2-z_2^2)-z_1^2=0,$$

ou bien

$$(9)\qquad \frac{z_1^2}{\alpha}+\frac{z_2^2}{\alpha+1}=1,$$

où z_1 a la forme de z dans l'équation (5), et z_2 la forme de z_1 dans l'équation (6).

Si l'on fait

$$f(x+iy)=\frac{1}{2}(x+iy)\quad\text{et}\quad F(x+iy)=0,$$

on a

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\alpha+1}=1.$$

Faisons

$$f(x+iy)=\frac{1}{2}(x+iy)^m,\quad F(x+iy)=\frac{1}{2}b(x+iy)^n,$$

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi;$$

nous obtiendrons

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{(a\rho^m\cos m\varphi+b\rho^n\cos n\varphi)^2}{\alpha}\\&+\frac{(a\rho^m\sin m\varphi+b\rho^n\sin n\varphi)^2}{\alpha+1}=1,\end{aligned}\right.$$

équation qui fournit une classe de courbes orthogonales dont les coniques font partie.

4. Les méthodes connues fournissent l'intégrale géné-

rale de l'équation (8) (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 547-550; 2^e édition; 1814). Cette intégrale est le résultat de l'élimination de c entre les deux équations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} 2cz - c_2 z_1^2 - [cz_2 - \varphi(c)]^2 + 1 = 0, \\ z - cz_1^2 - [cz_2 + \varphi(c)][z_2 + \varphi'(c)] = 0, \end{array}\right.$$

où $\varphi(c)$ est une fonction arbitraire, et où

$$\varphi'(c) = \frac{d\varphi(c)}{dc}.$$

Éliminant z entre les deux équations (11), et substituant la valeur de z tirée de la seconde de ces équations, dans l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

on a

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} c_2 z_1^2 + [cz_2 + \varphi(c)][cz_2 + 2c\varphi'(c) - \varphi(c)] + 1 = 0, \\ \alpha^2 + 2\alpha[cz_1^2 + cz_2 + \varphi(c)][z_2 + \varphi'(c)] - z_1^2 = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on élimine c, et si l'on met les valeurs de z_1 et z_2 en x, y données ci-dessus, on a une équation renfermant les trois fonctions arbitraires $f(x+iy)$, $F(x+iy)$ et $\varphi(c)$. On peut parvenir encore à d'autres systèmes de courbes à intersections orthogonales par divers modes d'intégrations, plus ou moins compliquées, de l'équation (3). Nous ne nous y arrêtons pas, et nous ferons l'observation suivante.

5. Nous avons déduit des deux équations spéciales

$$\alpha^2 + 2\alpha z_1 - z_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{z_1^2}{\alpha} + \frac{z_2^2}{\alpha+1} = 1,$$

les équations des courbes

$$\alpha^2 - 2\alpha x - y^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha+1} = 1 \quad (\S\S\ 2 \text{ et } 3).$$

On passe donc de ce système au précédent en remplaçant x par z_1 et y par z_2. Ce remplacement a lieu dans le cas général.

En effet, soient u et u_1 deux fonctions de x et y, et supposons que

$$\varphi^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un système de courbes à intersections orthogonales; on a, d'après l'équation (3) du § 1,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dx}\right) - \left(\frac{du_1}{dy}\right)^2 \right] \\ \qquad\qquad - 2u \left(\frac{du}{dx}\frac{du_1}{dx} + \frac{du_1}{dx}\frac{du_1}{dy} \right) = 1, \end{array} \right.$$

et, réciproquement, lorsque cette équation subsiste, l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha u - u_1^2 = 0$$

représente un tel système. Supposons, maintenant, que u et u_1 sont des fonctions de z_1 et z_2, et faisons, comme ci-dessus,

$$dz_1 = p_1\,dx + q_1\,dy, \quad dz_2 = p_2\,dx + q_2\,dy;$$

alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz_1}p_1 + \frac{du}{dz_2}p_2, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dz_1}q_1 + \frac{du}{dz_2}q_2,$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{dz_1}p_1 + \frac{du_1}{dz_2}p_2, \quad \frac{du_1}{dy} = \frac{du_1}{dz_1}q_1 + \frac{du_1}{dz_2}q_2.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (13), et faisant usage des deux équations

$$p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 = 0, \quad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$

on obtient

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \left[\left(\frac{du}{dz_1}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz_2}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_1}\right)^2 - \left(\frac{du_1}{dz_2}\right)^2 \right] \\ \qquad\qquad - 2u \left(\frac{du}{dz_1}\frac{du_1}{dz_1} + \frac{du}{dz_2}\frac{du_1}{dz_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation se déduit de l'équation (13), en remplaçant x par z_1 et y par z_2 ; c'est ce qu'il s'agissait de faire voir.

5. M. Plucker appelle *foyers* d'une courbe, des points tels, qu'en menant par ces points des tangentes à la courbe, il y ait au moins deux tangentes faisant avec l'axe des x (par conséquent avec une droite quelconque) des angles dont les tangentes trigonométriques soient $+i$ et $-i$. On suppose d'ailleurs les axes rectangulaires. Nous avons vu que, dans le système de coniques à intersections rectangulaires, les courbes ont toutes les mêmes foyers ; et si nous adoptons la définition de M. Plucker, la même propriété a lieu, en général, pour tout système analogue. Dans un tel système, les courbes infiniment voisines ne doivent pas avoir d'intersections réelles ; car, en ces points, les courbes ne se couperaient pas à angle droit, mais à angle *nul;* en d'autres termes, un tel système de courbes ne peut pas avoir d'*enveloppe* réelle. C'est pour cette raison que nous avons introduit le carré négatif $-z_1^2$ dans l'équation

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0,$$

où z et z_1 sont des fonctions de x et y ; que ces fonctions soient soumises ou non aux formes (5) et (6), pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer α entre cette équation et sa dérivée

$$\alpha + z = 0,$$

ce qui donne l'équation

$$z_2 + z_1^2 = 0.$$

Cette équation est celle d'une surface imaginaire qui passe par les *points* donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0;$$

points qui sont les mêmes pour tout le système, et qui satisfont aux conditions de focalité établies par M. Plucker. En effet, soient les deux courbes du système

$$\alpha^2 + 2\alpha z - z_1^2 = 0, \quad \beta^2 + 2\beta z - z_1^2 = 0,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p\alpha - p_1 z_1}{q\alpha - q_1 z_1} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p\beta - p_1 z_1}{q\beta - q_1 z_1};$$

et aux points d'intersections réelles ou imaginaires de ces deux courbes, le produit des deux coefficients différentiels doit être égal à -1; par conséquent, lorsque β diffère infiniment peu de α, on a

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -1, \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-1};$$

et cela pour les points où les courbes infiniment rapprochées se coupent, par conséquent, dans tous les points donnés de l'enveloppe; donc, aux points donnés par les équations simultanées

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,$$

les tangentes aux courbes du système font, avec l'axe des x, des angles dont les tangentes trigonométriques sont $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$; ce qui caractérise des foyers.