NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. LOXHAY

Solution de la question 241

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 424-426

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__424_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 241

(voir t. X, p. 357) ;

PAR M. TH. LOXHAY,
Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

Soit

$$T_{n+2} = aT_{n+1} - bT_n,$$

équation caractéristique d'une série récurrente; on a

$$\frac{T_{n+1}^2 - aT_nT_{n+1} + bT_n^2}{b^n} = \textit{constante}. \qquad \text{(EULER.)}$$

Solution. L'échelle de relation de la série récurrente étant composée de deux termes, on sait que la fraction génératrice aura la forme $\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2}$; cette fraction pourra se décomposer en deux fractions partielles, $\frac{A}{x-p}$ et $\frac{B}{x-q}$; de sorte que l'on aura

$$\frac{\alpha + \beta x}{\alpha' + \beta' x + x^2} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q},$$

avec les relations

$$A = \frac{\beta p + \alpha}{p - q}, \quad B = -\frac{\beta q + \alpha}{p - q}, \quad p + q = \beta', \quad pq = \alpha'.$$

Pour déterminer les quantités a et b, il faut remarquer que le terme général de la série récurrente est donné par la formule

$$T_n = -\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right),$$

et, par suite,

$$T_{n+1} = -\left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}}\right),$$
$$T_{n+2} = -\left(\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}}\right).$$

Subtituant ces valeurs dans l'équation caractéristique, on aura

$$\frac{A}{p^{n+2}} + \frac{B}{q^{n+2}} = a\left(\frac{A}{p^{n+1}} + \frac{B}{q^{n+1}}\right) - b\left(\frac{A}{p^n} + \frac{B}{q^n}\right),$$

mais ce résultat devant subsister pour toutes les valeurs imaginables de A et B, on obtiendra, en égalant séparément les coefficients de ces quantités à zéro,

$$1 - ap + bp^2 = 0, \quad 1 - aq + bq^2 = 0;$$

d'où

$$a = \frac{p+q}{pq}, \quad b = \frac{1}{pq}.$$

Si l'on multiplie successivement T_n par $\frac{1}{p}$ et par $\frac{1}{q}$, et que l'on retranche des deux produits T_{n+1}, il viendra

$$\frac{T_n}{p} - T_{n+1} = -\frac{B}{q^n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$
$$\frac{T_n}{q} - T_{n+1} = -\frac{A}{p^n}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right);$$

multipliant encore ces deux résultats l'un par l'autre, on aura

$$\frac{T_n^2}{pq} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)T_n T_{n+1} + T_{n+1}^2 = -\frac{BA}{p^n q^n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2;$$

puis, en remplaçant $\frac{p+q}{pq}$ par a, $\frac{1}{pq}$ par b, et $\frac{1}{p^n q^n}$ par b^n,

$$\frac{bT_n^2 - aT_nT_{n+1} + T_{n+1}^2}{b^n} = -BA\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 = \textit{constante}.$$