NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-A. SERRET

Théorème d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 414-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__414_0>

THÉORÊME D'ARITHMÉTIQUE;

Par M. J.-A. SERRET.

(*Traité d'Arithmétique* de M. Serret, page 116.)

Soient

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \ldots, \quad A_i,$$

i nombres entiers quelconques.

Soient

P_1 le produit de tous ces nombres;

P_λ le produit des plus grands communs diviseurs de ces mêmes nombres considérés λ à λ;

P_i le plus grand commun diviseur de tous les nombres.

Soient enfin

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots P_{i-1}}{P_2 P_4 P_6 \ldots P_i} \text{ si } i \text{ est pair,}$$

ou

$$M = \frac{P_1 P_3 P_5 \ldots P_i}{P_2 P_4 P_6 \ldots P_{i-1}} \text{ si } i \text{ est impair.}$$

Je dis que M est le plus petit commun multiple des nombres proposés (Lebesgue, *Journal de Mathématiques*, tome II, page 258; 1837).

Démonstration. Soit θ un facteur premier divisant h des nombres proposés

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_h;$$

par exemple, soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_h$$

les exposants des puissances de θ les plus élevées par lesquelles ces nombres sont respectivement divisibles. Je supposerai, pour fixer les idées, que ces exposants sont rangés par ordre de grandeur à partir du plus petit; en sorte que chacun d'eux peut être égal, mais non inférieur au précédent.

La plus haute puissance de θ qui divise P_1 a pour exposant

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k.$$

Cherchons généralement l'exposant ϖ_λ de la plus haute puissance de θ contenue dans P_λ.

Comme ceux des nombres proposés qui ne font pas partie de la série

$$A_1, \quad A_2, \ldots, \quad A_k,$$

n'admettent pas le facteur θ, P_λ n'est divisible par θ que si λ est inférieur ou au plus égal à k, et il est évident que, pour avoir ϖ_λ, il suffit de former tous les groupes de λ nombres parmi A_1, A_2, $A_k, \ldots$; de prendre dans chaque groupe le plus grand commun diviseur de tous les nombres, puis l'exposant de la plus haute puissance de θ, qui le divise; et enfin d'ajouter ces exposants. Or, dans cette somme d'exposants, ou dans ϖ_λ, α_1 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_1; α_2 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_2 et ne renfermant pas A_1; α_3 se trouvera autant de fois qu'il y a de groupes renfermant A_3 et ne renfermant ni A_2 ni A_1; et ainsi de suite, jusqu'à $\alpha_{k-\lambda+1}$, qui ne se trouvera qu'une seule fois. En désignant donc par C_μ le nombre des combinaisons de μ lettres $\lambda-1$ à $\lambda-1$, on aura

$$\varpi_\lambda = C_{k-1}\alpha_1 + C_{k-2}\alpha_2 + C_{k-3}\alpha_3 + \ldots + C_\lambda \alpha_{k-\lambda} + \alpha_{k-\lambda+1},$$

ou

$$\varpi_\lambda = \frac{(k-1)\ldots(k-\lambda+1)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_1 + \frac{(k-2)\ldots(k-\lambda)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_2 + \ldots$$
$$+ \frac{(k-f)\ldots(k-f-\lambda+2)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-\lambda+1}.$$

On a, d'après cela,

$$\varpi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_f + \ldots + \alpha_k,$$
$$\varpi_2 = \frac{k-1}{1}\alpha_1 + \frac{k-2}{1}\alpha_2 + \ldots + \frac{k-f}{1}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-1},$$

$$\varpi_3 = \frac{(k-1)(k-2)}{1.2}\alpha_1 + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2}\alpha_2 + \ldots + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2}\alpha_f + \ldots + \alpha_{k-1},$$

....

$$\varpi_{k-1} = \frac{(k-1)\ldots 2}{1.2\ldots(k-2)}\alpha_1 + \frac{(k-2)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\alpha_2,$$

$$\varpi_k = \frac{(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\alpha_1.$$

Si ϖ désigne l'exposant de θ au numérateur de la fraction M supposée réduite à sa plus simple expression, on aura

$$\varpi = \varpi_1 - \varpi_2 + \varpi_3 - \varpi_4 + \ldots \pm \varpi_{k-1} \mp \varpi_k,$$

donc

$$\begin{aligned}\varpi = \alpha_1 &\left[1 - \frac{k-1}{1} + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2} + \ldots \pm \frac{(k-1)\ldots 2}{1.2\ldots(k-2)} \mp \frac{(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots(k-1)}\right] \\ &+ \alpha_2\left[1 - \frac{k-2}{1} + \frac{(k-2)(k-3)}{1.2} - \ldots \pm \frac{(k-2)\ldots 1}{1.2\ldots(k-2)}\right] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \alpha_f\left[1 + \frac{(k-f)}{1} + \frac{(k-f)(k-f-1)}{1.2} - \ldots \pm \frac{(k-f)\ldots 2.1}{1.2\ldots(k-f)}\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \alpha_{k-1}(1-1) \\ &+ \alpha_k.\end{aligned}$$

Les coefficients de α_1, α_2, ..., α_{k-1} sont nuls; car ce sont les puissances $k-1$, $k-2$, etc., du binôme $1-1$; donc

$$\varpi = \alpha_k.$$

Il suit de là que M est un nombre entier, et la puissance de θ, qui le divise, est précisément la plus haute puissance de θ par laquelle l'un des nombres proposés est divisible; donc M est le plus petit multiple commun des nombres proposés. C. Q. F. D.