NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Trigonométrie sphérique. Théorème de Legendre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 406-408

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__406_1>

TRIGONOMETRIE SPHÉRIQUE. — THÉORÈME DE LEGENDRE;

PAR M. E. CATALAN.

Dans le cours que j'ai fait cette année au lycée Saint-Louis, j'ai donné à mes élèves la démonstration suivante du célèbre théorème à l'aide duquel on ramène la résolution d'un triangle sphérique, ayant ses côtés fort petits, à la résolution d'un triangle rectiligne. Cette démonstration me paraissant assez simple, j'ai pensé qu'elle pourrait peut-être intéresser les lecteurs des *Annales*.

Soit un triangle sphérique dont les côtés sont supposés très-petits relativement au rayon R de la sphère. Soient a, b, c les longueurs de ces côtés, exprimées en *mètres*. Nous aurons, par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos A, \tag{1}$$

A étant l'angle opposé au côté a.

Soit un triangle rectiligne ayant les côtés égaux à ceux du triangle sphérique rectifié; nous aurons aussi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A', \tag{2}$$

en appelant A' l'angle opposé au côté a.

Posons

$$A = A' + x,$$

x sera un très-petit angle, et nous aurons, à fort peu près,

$$\cos A = \cos A' - x \sin A'. \tag{3}$$

Cette formule suppose, bien entendu, que l'on a mesuré les angles par les arcs correspondants, *dans le cercle dont le rayon est* 1.

Développons les sinus et cosinus qui entrent dans l'équation (1); nous aurons, en nous bornant aux termes du quatrième ordre,

$$\cos\frac{a}{R} = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4}, \quad \cos\frac{b}{R} = 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4},$$

$$\cos\frac{c}{R} = 1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4},$$

$$\sin\frac{b}{R} = \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}, \quad \sin\frac{c}{R} = \frac{c}{R} - \frac{c^3}{6R^3}.$$

La substitution de ces valeurs et de la valeur (3), dans l'équation (1), donne

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right)$$
$$+ \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{6R^2}\right)(\cos A' - x \sin A');$$

d'où, en effectuant et en négligeant des termes d'un ordre supérieur au quatrième,

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{4R^4} \\ & + \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right)\cos A' - \frac{bc}{R^2} x \sin A'. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Mais, en vertu de la formule (2),

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = -\frac{b^2}{2R^2} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} + \frac{b^2c^2}{12R^4} \\ & + \frac{c^4}{24R^4} + \frac{bc}{R^2}\left(1 - \frac{b^2}{6R^2} - \frac{c^2}{6R^2}\right)\cos A' + \frac{b^2c^2}{6R^2}\cos^2 A'. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Retranchons membre à membre les équations (4) et (5); nous aurons

$$o = \frac{b^2c^2}{6R^4} - \frac{bc}{R^2}\, x \sin A' - \frac{b^2c^2}{6R^4}\cos^2 A';$$

d'où

$$x = \frac{bc}{6R^2}\sin A'.$$

Soit maintenant T' l'aire du triangle rectiligne;

$$T' = \frac{1}{2}\, bc \sin A;$$

par suite,

$$x = \frac{T'}{3R^2}.$$

On a donc, à fort peu près,

$$A = A' + \frac{T'}{3R^2}, \quad B = B' + \frac{T'}{3R^2}, \quad C = C' + \frac{T'}{3R^2};$$

d'où

$$A + B + C - \pi = \frac{T'}{R^2}.$$

Le premier membre de cette formule est ce qu'on nomme l'*excès sphérique*. En le désignant par ε, nous aurons donc

$$A = A' + \frac{1}{3}\varepsilon, \quad B = B' + \frac{1}{3}\varepsilon, \quad C = C' + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Ainsi, *chacun des angles du triangle sphérique se compose de l'angle correspondant du triangle rectiligne, augmenté du tiers de l'excès sphérique.* C'est là le théorème de Legendre.