Nouvelles annales de mathématiques

Sur le théorème de M. Sturm ; d'après M. Borchardt

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 403-405

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__403_0>

SUR LE THÉORÈME DE M. STURM;

D'APRÈS M. BORCHARDT.

(Journal de M Liouville, tome XII, page 54; 1847

1. *Lemme.* Soient $V = 0$ une équation algébrique de degré n; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n racines; $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ les fonctions *sturmiennes*; on a

$$V = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$
$$V_1 = \Sigma(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n),$$
$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2}\Sigma(a_1 - a_2)^2(x - a_3)(x - a_4)\ldots(x - a_n),$$
$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3}\Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_2)^2(a_2 - a_3)^2(x - a_4)(x - a_5)\ldots(x - a_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_n = \frac{1}{\lambda_n}\Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2\ldots(a - a_n)^2(a_2 - a_3)^2\ldots(a_{n-1} - a_n)^2.$$

Faisons

$$p_1 = n,$$
$$\lambda_2 = p_1^2, \qquad p_2 = \Sigma(a_1 - a_2)^2,$$
$$\lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2, \qquad p_3 = \Sigma(a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2,$$
$$\lambda_4 = \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lambda_5 = \left(\frac{p_2 p_3}{p_1 p_3}\right)^2, \qquad p_n = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2\ldots(a_{n-1} - a_n)^2.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(SYLVESTER.)

$p_1, p_2, \ldots$ étant des fonctions symétriques, les racines sont des quantités réelles; donc les quantités $\lambda_2, \lambda_3, \ldots,$ sont des quantités positives.

Observation. Ce beau théorème, énoncé seulement par l'illustre auteur (voir *Nouvelles Annales*, t. [illegible], p. 166), a été démontré par M. Sturm.

(LIOUVILLE, tome VII, page 356; 1842.)

2. Désignons par ν_k le coefficient de la plus haute puissance de x^{n-k} de x dans la fonction V_k, et formons les deux séries

$$\begin{array}{cccccc} (-1)^n \nu, & (-1)^{n-1}\nu_1, & (-1)^{n-2}\nu_2,\ldots, & +\nu_{n-2}, & -\nu_{n-1}, & \nu_n, \\ \nu, & \nu_1, & \nu_2,\ldots, & \nu_{n-2}, & \nu_{n-1}, & \nu_n. \end{array}$$

Soient α et β les nombres des *permanences* de signes, dans la première et dans la deuxième série, on aura

$$\alpha + \beta = n.$$

En effet, si $\beta = 0$, on a évidemment $\alpha = n$. S'il y a une variation dans la deuxième série, par exemple entre ν et ν_1, il y aura une permanence correspondante dans la série supérieure; donc le nombre total des variations ne change pas.

3. Soit ν le nombre des racines réelles de l'équation; on sait qu'on a $\nu = \alpha - \beta$, ou bien, d'après ce qui précède, $\nu = n - 2\beta$; ainsi l'équation a β couples de racines imaginaires, c'est-à-dire que l'équation a autant de couples de racines imaginaires que la seconde série présente de variations.

4. Il est évident, ayant égard au lemme de Sylvester, que l'on a

$$\nu = 1, \quad \nu_1 = p_1, \quad \nu_2 = \frac{1}{\lambda_2} p_2, \quad \nu_3 = \frac{1}{\lambda_3} p_3, \ldots, \quad \nu_n = \frac{1}{\lambda_n} p_n.$$

Or $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ sont des quantités positives; donc la série

$$1, \quad p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_n$$

présente le même nombre de variations que la série

$$\nu, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \ldots, \quad \nu_n;$$

par conséquent, l'équation a autant de couples de racines imaginaires que la série en p a de variations. Ainsi, on peut former *directement* une série où les signes des termes apprennent à connaître le nombre des racines réelles et imaginaires, sans avoir besoin de calculer les fonctions de M. Sturm. Comme les formules de Waring donnent les valeurs des fonctions symétriques en fonction des coefficients (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 76), on trouve aisément les termes de la série en p.

Observation. M. Hermite vient d'étendre le théorème de M. Sturm à deux équations à deux inconnues; extension depuis longtemps désirée, et d'une haute importance, même pratique. Ce théorème donne le moyen d'obtenir les racines imaginaires par approximation, puisque la recherche de ces racines se ramène à la résolution de deux équations, à deux inconnues.