H. FAURE

Nouvelle expression de l'aire d'une surface (Strebor)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 393-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__393_1>

NOUVELLE EXPRESSION DE L'AIRE D'UNE SURFACE (STREBOR)

(voir t. IX, p. 310),

PAR M. H. FAURE.

Soit R la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur un plan tangent quelconque à une surface donnée, et soient θ, φ les angles qui déterminent la position de cette droite; en posant, pour abréger,

$$L = R\sin\theta + \frac{dR}{d\theta}\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d^2R}{d\varphi^2},$$

$$M = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dR}{d\varphi} - \frac{d^2R}{d\theta\, d\varphi},$$

$$N = R + \frac{d^2R}{d\theta^2},$$

l'aire de la surface dont il s'agit aura pour expression

$$A = \int\int\left(LN - \frac{M^2}{\sin\theta}\right) d\theta\, d\varphi. \qquad \text{(STREBOR.)}$$

La démonstration de ce théorème est très-simple, mais elle conduit à des calculs trop complexes pour que nous puissions les exposer ici; nous allons simplement indiquer la marche que nous avons suivie pour y arriver.

Si l'on regarde les coordonnées x, y, z des points d'une surface comme fonctions de deux variables indépendantes a et b, de telle sorte que l'on ait

$$dx = \frac{dx}{da} da + \frac{dx}{db} db,$$

$$dy = \frac{dy}{da} da + \frac{dy}{db} db,$$

$$dz = \frac{dz}{da} da + \frac{dz}{db} db,$$

et que l'on pose, pour abréger,

$$\frac{dx\,dy}{da\,db} - \frac{dx\,dy}{db\,da} = \mathrm{Z},$$

$$\frac{dz\,dx}{da\,db} - \frac{dz\,dx}{db\,da} = \mathrm{Y},$$

$$\frac{dy\,dz}{da\,db} - \frac{dy\,dz}{db\,da} = \mathrm{X},$$

on trouvera

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Z}}, \quad \frac{dz}{dy} = q = -\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{Z}}.$$

(*Voyez* Lacroix, n° 774.)

Donc l'aire d'une surface sera exprimée par la formule

$$\mathrm{A} = \int\int \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}\, da\, db.$$

Supposons que x, y, z soient les coordonnées du point de contact d'une surface avec son plan tangent, et que l'on projette la droite qui joint le point fixe avec le point (x, y, z) sur la perpendiculaire abaissée de ce même point fixe sur son plan tangent; il est facile de voir, en employant les notations indiquées plus haut, que R aura pour expression

$$(1) \qquad \mathrm{R} = x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta;$$

d'où l'on déduit

$$(2)\qquad \frac{dR}{d\theta} = x\cos\varphi\cos\theta + y\sin\varphi\cos\theta - z\sin\theta,$$

$$(3)\qquad \frac{dR}{d\varphi} = y\cos\varphi\sin\theta - x\sin\varphi\sin\theta,$$

puisque

$$\sin\theta\cos\varphi\, dx + \sin\theta\sin\varphi\, dy + \cos\theta\, dz = 0.$$

Résolvant les équations (1), (2), (3) par rapport à x, y, z, on trouve

$$x = R\sin\theta\cos\varphi + \frac{dR}{d\theta}\cos\varphi\cos\theta - \frac{dR}{d\varphi}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi + \frac{dR}{d\theta}\sin\varphi\cos\theta + \frac{dR}{d\varphi}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta},$$

$$z = R\cos\theta - \frac{dR}{d\theta}\sin\theta.$$

Et si l'on regarde θ et φ comme des variables indépendantes dont R serait une fonction, on trouvera

$$\frac{dx}{d\theta} = \quad M\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + N\cos\varphi\cos\theta + \frac{dR}{d\theta}\sin(\theta-\varphi),$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -M\cos\theta\cos\varphi - L\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -M\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + N\sin\varphi\cos\theta + \frac{dR}{d\theta}\sin(\theta-\varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -M\cos\theta\sin\varphi + L\cos\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -N\sin\theta,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \quad M\sin\theta.$$

De là l'on déduit les valeurs de X, Y, Z, faisant $a=\theta$, $b=\varphi$, et par suite, la valeur indiquée pour la surface.

Dans le cas d'une courbe plane, on peut donner aussi pour l'expression de la longueur de l'arc, une forme analogue à la précédente, mais qui se déduit très-aisément de la valeur de la perpendiculaire R abaissée d'un point fixe sur la tangente à la courbe. On a en effet, x, y étant les coordonnées du point de contact,

$$R = y \sin\varphi + x \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{dR}{d\varphi} = y \cos\varphi - x \sin\varphi,$$

puisque

$$\sin\varphi\, dy + \cos\varphi\, dx = 0.$$

En résolvant ces deux équations, on trouve

$$x = R \cos\varphi - \frac{dR}{d\varphi} \sin\varphi,$$

$$y = R \sin\varphi + \frac{dR}{d\varphi} \cos\varphi;$$

puis, en regardant R comme une fonction de φ,

$$dx = -\sin\varphi \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi,$$

$$dy = \cos\varphi \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi.$$

Ajoutant les carrés de ces deux expressions, on trouvera pour la longueur S de la courbe, l'expression

$$S = \int \left(R + \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right) d\varphi = \int N\, d\varphi.$$

Les applications de ces formules peuvent être fréquentes ; elles offrent cette particularité de présenter l'expression de l'aire ou de la longueur de la courbe, sous forme rationnelle.

On trouvera ainsi que l'aire d'un ellipsoïde dont les *demi-axes* sont a, b, c, est égale à l'intégrale double

$$a^2 b^2 c^2 \int\int \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{[c^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta\,(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)]^2},$$

prise entre les limites o, $\frac{\pi}{2}$.

Relativement à l'ellipse dont les demi-axes seraient a et b, on trouvera, pour l'expression de son arc,

$$a^2 b^2 \int \frac{d\varphi}{(a^2 - c^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{où} \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Cela s'obtient facilement, en remarquant que la perpendiculaire abaissée du centre d'un ellipsoïde sur son plan tangent a pour valeur

$$R = \sqrt{a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\theta},$$

de même que, dans l'ellipse, la perpendiculaire abaissée de son centre sur la tangente est égale à

$$\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}.$$

Ces valeurs s'obtiennent par le calcul, ou plus simplement en se rappelant que la somme des carrés des projections des demi-axes principaux d'une ellipse ou d'un ellipsoïde sur une droite (R) est égale à la somme des carrés des projections de tout autre système de diamètres conjugués sur la même droite. Si l'on prend pour ce second système celui dont la perpendiculaire R fait partie, on arrivera à exprimer la longueur de cette droite en fonction des axes et des angles qu'elle fait avec eux, lesquels sont bien faciles à éliminer.