NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON DE CHAMP

Lieu des sommets des cônes droits circonscrits à une surface du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 369-375

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__369_0>

LIEU DES SOMMETS DES CÔNES DROITS CIRCONSCRITS A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

On doit à M. Steiner ce théorème remarquable : *Les sommets des cônes droits circonscrits à un ellipsoïde sont sur une hyperbole.* Je vais le démontrer au moyen d'un procédé de transformation analogue à celui dont j'ai déjà fait usage au sujet du lieu des points de rencontre des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle variable (page 62 de ce volume).

1. *Lemme.* $C = 0$ étant l'équation d'une surface conique du second ordre, et $P = lx + my + nz + k = 0$ celle du plan de la courbe de contact d'une surface du même ordre inscrite, l'équation de cette nouvelle surface est nécessairement de la forme $C + \gamma P^2 = 0$, où γ désigne un paramètre.

Car cette équation devant être vérifiée, en faisant à la fois $C = 0$, $P = 0$, doit pouvoir être mise sous la forme $C + PQ = 0$, Q étant du premier degré en x, y, z. Si l'on exprime ensuite que le plan tangent à cette surface, suivant la ligne de contact $P = 0$, coïncide avec le plan tangent à la surface conique, il vient la triple équation

$$\frac{\frac{dC}{dx}}{\frac{dC}{dx} + Q\frac{dP}{dx}} = \frac{\frac{dC}{dy}}{\frac{dC}{dy} + Q\frac{dP}{dy}} = \frac{\frac{dC}{dz}}{\frac{dC}{dz} + Q\frac{dP}{dz}};$$

d'où résulte la double égalité

$$Q\left(\frac{dC}{dx}\frac{dP}{dz} - \frac{dC}{dz}\frac{dP}{dx}\right) = 0, \quad Q\left(\frac{dC}{dy}\frac{dP}{dz} - \frac{dC}{dz}\frac{dP}{dy}\right) = 0.$$

Si Q n'était pas nul en même temps que P, les facteurs entre parenthèses seraient nuls, et, en faisant attention que $\frac{dP}{dx} = l$, $\frac{dP}{dy} = m$, $\frac{dP}{dz} = n$, on en tirerait

$$\frac{dC}{dx} = \frac{l}{n}\frac{dC}{dz}, \quad \frac{dC}{dy} = \frac{m}{n}\frac{dC}{dz},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2} = \frac{1}{n}\frac{dC}{dz}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2},$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dC}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\frac{\frac{dC}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\frac{\frac{dC}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dC}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dz}\right)^2}} = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

La normale à la surface conique coïnciderait donc, dans toute l'étendue de la courbe de contact, avec la normale au plan de cette courbe, ce qui ne saurait être admis. On a donc $Q = 0$ en même temps que $P = 0$, c'est-à-dire $Q = \gamma P$. C. Q. F. D.

2. *Lemme.* Lorsque deux surfaces du second ordre sont inscrites dans une même surface conique, aussi du second ordre, leur intersection est une courbe plane, ou plutôt un système de deux courbes planes. Soient, en effet, $C = 0$, $P = 0$, $P' = 0$ les équations de la surface conique et des deux plans de contact; les équations des

deux surfaces seront, d'après le lemme qui précède,

$$C + \gamma P^2 = 0, \quad C + \gamma' P'^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$P\sqrt{\gamma} \pm P'\sqrt{\gamma'} = 0,$$

équation de deux plans.

3. *Réciproquement, pour que deux surfaces du second ordre puissent être considérées comme inscriptibles dans un même cône, il faut et il suffit que ces surfaces se coupent suivant une courbe plane.*

Tout se réduit à faire voir que l'une des deux surfaces peut être considérée comme une transformée *homologique* de l'autre. Soient

$$\begin{aligned} u = {} & ax^2 + by^2 + cz^2 + fyz + gzx + hxy \\ & + a'x + b'y + c'z + u_0 = 0 \end{aligned}$$

l'équation de la première, et

$$s = 0$$

celle du plan que, d'après le lemme ci-dessus, elle a en commun avec la seconde; l'équation de cette dernière sera de la forme

$$u + st = 0.$$

Cela posé, je fais, dans $u = 0$,

$$\frac{x - \xi}{x' - \xi} = \frac{y - \eta}{y' - \eta} = \frac{z - \zeta}{z' - \zeta} = \frac{1}{1 + s'\lambda},$$

s' étant s dans lequel on a remplacé x, y, z par x', y', z'. $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ sont des paramètres dont je disposerai, de telle sorte que la transformée en x', y', z', obtenue de $u = 0$, devienne identique avec $u + st = 0$. Il est bien évident que, par cette transformation, la nouvelle surface se trouvera inscrite avec la première $u = 0$ dans une même surface conique, ayant son sommet au point ξ, η, ζ, de sorte que, si l'identité peut s'établir généralement, le théorème sera démontré.

Appelant, pour abréger, υ le résultat de la substitution de ξ, η, ζ, au lieu de x, y, z, dans u, et effaçant les accents des nouvelles coordonnées, il vient, pour l'équation de la transformée,

$$u + s\lambda\left[\left(x\frac{d\upsilon}{d\xi} + y\frac{d\upsilon}{d\eta} + z\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right) + (a'\xi + b'\eta + c'\zeta) + 2u_0\right] + s^2\lambda^2\upsilon = o$$

Pour la rendre identique avec $u + st = o$, il suffit d'identifier le polynôme $t = lx + my + nz + h$ avec

$$\lambda\left[\left(x\frac{d\upsilon}{d\xi} + y\frac{d\upsilon}{d\eta} + z\frac{d\upsilon}{d\zeta}\right) + (a'\xi + b'\eta + c'\zeta) + 2u_0\right] + s\lambda^2\upsilon.$$

Mettant s sous la forme explicite $\frac{x}{q} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = \sigma$, et égalant entre eux les coefficients des variables x, y, z, ainsi que les quantités constantes, on a les équations

$$\lambda\frac{d\upsilon}{d\xi} + \lambda^2\frac{\upsilon}{p} = l,\quad \lambda\frac{d\upsilon}{d\eta} + \lambda^2\frac{\upsilon}{q} = m,$$

$$\lambda\frac{d\upsilon}{d\zeta} + \lambda^2\frac{\upsilon}{r} = n,\quad \lambda(a'\xi + b'\eta + c'\zeta + 2u_0) - \lambda^2\upsilon\sigma = h;$$

leur nombre est égal à celui des inconnues, et par conséquent le problème est, en général, déterminé.

Si l'on tire de la dernière de ces équations

$$\lambda^2\upsilon = \frac{1}{\sigma}[\lambda(a'\xi + b'\eta + c'\zeta + 2u_0) - h],$$

et qu'on substitue cette expression de $\lambda^2\upsilon$ dans les trois premières, λ pourra en être ensuite éliminé, en les divisant membre à membre, et il restera deux équations du premier degré en ξ, η, ζ, c'est-à-dire l'équation d'une ligne droite passant par les sommets des cônes cherchés. D'un autre côté, l'élimination de λ, dirigée convenablement, fournit trois équations du second ordre en ξ, η, ζ : par conséquent, il n'y a que deux solutions, puisqu'elles sont données par les intersections d'une droite et d'une surface du second ordre.

Observation. Les propositions qui précèdent ne sont pas nouvelles ; cependant j'ai cru devoir les démontrer ici, afin d'éviter au lecteur la peine de les chercher dans les ouvrages où elles se trouvent.

4. Il est maintenant bien facile de démontrer le théorème de M. Steiner. Si un cône droit est circonscrit à une surface du second ordre, toute sphère inscrite coupe cette surface suivant une courbe plane, et, par conséquent, suivant une de ses sections circulaires. On en conclut que les sommets de tous les cônes droits sont situés dans un plan passant par le centre, et renfermant les quatre ombilics ou points sphériques de la surface. Supposons, pour fixer les idées, que celle-ci ait pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et faisons

$$\frac{x-\xi}{x'-\xi}=\frac{y-\eta}{y'-\eta}=\frac{z-\zeta}{z'-\zeta}=\frac{1}{s'\lambda+1},$$

s' étant de la forme indiquée ci-dessus. Nous pouvons, pour tenir compte de ce qui vient d'être dit, et en admettant que les ombilics sont dans le plan des xz, écrire

$$\eta=0 \quad \text{et} \quad q=\frac{1}{0}.$$

Cela posé, on obtient, pour la surface transformée, l'équation

$$\frac{y'^2}{b^2}+Ax'^2+Bx'z'+Cz'^2+Dx'+Ez'+F=0,$$

dans laquelle

$$A = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\xi}{a^2 p} + \frac{1}{a^2},$$

$$C = \frac{\lambda^2}{p^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{2\lambda\zeta}{c^2 p} + \frac{1}{c^2},$$

$$B = \frac{2\lambda}{pr}\left[\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1\right) + \frac{p\xi}{a^2} + \frac{p\zeta}{c^2}\right].$$

Pour que la transformée soit une sphère, il faut écrire

$$A = C = \frac{1}{b^2} \quad \text{et} \quad B = 0.$$

Tirant λ de la dernière de ces équations, et le substituant dans $A = C$, on obtient

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{r^2}{c^2}\right)} - \frac{\zeta^2}{\left(\frac{p^2}{a^2}\right)} = \frac{a^2 - c^2}{\frac{p^2}{a^2} + \frac{r^2}{c^2}},$$

équation d'une hyperbole ayant pour foyers ceux de la section ombilicale de l'ellipsoïde. On devait s'attendre à ce résultat, d'après la forme des coefficients A, B, C, lesquels sont composés de la même manière que ceux de la page 63. Mais il faut encore avoir égard à la relation

$$A = \frac{1}{b^2}, \quad \text{ou} \quad C = \frac{1}{b^2},$$

et l'on trouve sans peine que les nouvelles équations ainsi obtenues entre ξ et ζ deviennent identiques avec celle qui précède, si l'on prend

$$\frac{r^2}{p^2} = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

C'est la relation qu'il faut établir entre r et p pour déterminer les sections circulaires de l'ellipsoïde. Le théorème de M. Steiner est donc complétement démontré, et l'équation du lieu des sommets des cônes droits circonscrits à l'ellipsoïde prend finalement la forme

$$\frac{\xi^2}{a^2 - b^2} - \frac{\zeta^2}{b^2 - c^2} = 1$$

Observation. Les relations d'où ce résultat a été déduit sont indépendantes de σ; par conséquent, si l'on conçoit une sphère variable ayant en commun avec un ellipsoïde une section circulaire, cette sphère pourra être regardée comme inscrite dans un cône droit tangent à l'ellipsoïde, et le lieu des sommets de ce cône sera une hyperbole ayant pour foyers ceux de la section ombilicale de l'ellipsoïde. Énoncé tout à fait semblable à celui du théorème de M. Chasles (tome X, page 408).