Solution du problème de mathématiques supérieures du grand concours de 1852 ; d'après M. Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 364-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__364_0>

SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES DU GRAND CONCOURS DE 1852;

D'APRÈS M. GAUSS.

I.

$$(1)\qquad p\sin(A - P) = a,$$

$$(2)\qquad p\sin(B - P) = b;$$

a, b, A, B sont donnés, il s'agit de trouver p et P.

Ces deux équations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$p\sin(B - A)\sin(H - P) = b\sin(H - A) - a\sin(H - B),$$

$$p\sin(B - A)\cos(H - P) = b\cos(H - A) - a\cos(H - B);$$

H est un angle quelconque.

Ces deux équations donnent la valeur de l'angle $H - P$, et celle de $p\sin(B - A)$, et par conséquent p et P sont connus.

Faisant, pour simplifier, $H = A$, on a

$$p\sin(A - P) = a,$$

$$p\cos(A - P) = \frac{b - a\cos(B - A)}{\sin(B - A)};$$

on a des équations analogues, en faisant $H = B$.

Si l'on fait

$$2H = A + B,$$

on obtient

$$p\sin\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b + a}{2\cos\frac{1}{2}(B - A)},$$

$$p\cos\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = \frac{b - a}{2\sin\frac{1}{2}(B - A)};$$

Si l'on pose $\frac{a}{b} = \text{tang}\,\zeta$, il vient

$$\text{tang}\left(\frac{1}{2}\text{A} + \frac{1}{2}\text{B} - \text{P}\right) = \text{tang}\,(45^\circ + \zeta)\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(\text{B} - \text{A}),$$

ainsi on connaît P ; et l'on trouve p, par une des formules précédentes, où

$$\frac{1}{2}(b + a) = \sin\,(45^\circ + \zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}}$$
$$= \frac{a \sin\,(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}} = \frac{b \sin\,(45^\circ + \zeta)}{\cos\zeta.\sqrt{2}},$$
$$\frac{1}{2}(b - a) = \cos\,(45^\circ + \zeta)\sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}}.$$
$$= \frac{a \cos\,(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}} = \frac{b \cos\,(45^\circ + \zeta)}{\sin\zeta.\sqrt{2}}:$$

on a encore

$$p \sin\,(\text{B} - \text{A}) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\,(\text{B} - \text{A})}.$$

II.

$$p \cos\,(\text{A} - \text{P}) = a,$$
$$p \cos\,(\text{B} - \text{P}) = b,$$

mêmes données; il s'agit de trouver p et P. On remplace ces équations par celles-ci :

$$p \sin\,(\text{B} - \text{A}) \sin\,(\text{H} - \text{P}) = - b\cos\,(\text{H} - \text{A}) + a\cos\,(\text{H} - \text{B}),$$
$$p \sin\,(\text{B} - \text{A}) \cos(\text{H} - \text{P}) = b \sin(\text{H} - \text{A}) - a\sin\,(\text{H} - \text{B});$$

le reste comme ci-dessus.

(GAUSS, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 82; 1809.)

III.

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + e\cos\,(\text{N} - \text{P}), \\ \frac{p}{r'} &= 1 + e\cos\,(\text{N}' - \text{P}), \\ \frac{p}{r''} &= 1 + e\cos\,(\text{N}'' - \text{P}). \end{aligned} \right.$$

r, r', r''; N, N′, N″ données; ce sont celles du problème.

Multipliant la première équation par $\sin(N''-N')$, la seconde par $-\sin(N''-N)$, et la troisième par $\sin(N'-N)$, et ajoutant, on a

$$p=\frac{\sin(N''-N')-\sin(N''-N)+\sin(N'-N)}{\frac{1}{r}\sin(N''-N')-\frac{1}{r'}\sin(N''-N)+\frac{1}{r''}\sin(N'-N)}$$

$$=\frac{R\,r'\,r''\,r'''}{Q},$$

$$R=4\sin\frac{1}{2}(N''-N')\sin\frac{1}{2}(N''-N)\sin\frac{1}{2}(N'-N),$$

$$Q=r'r''\sin(N''-N')-rr''\sin(N''-N)+rr'\sin(N'-N)$$
$$=n-n'+n'';$$

$n-n'+n''$ est le double de l'aire du triangle qui a pour sommets les extrémités des rayons vecteurs r, r', r'' ; si cette aire est petite, p devient grand, et de légères erreurs d'observations amènent de grandes erreurs dans le calcul de p; connaissant p, on trouve e, et ensuite P par la méthode du § II, en combinant deux quelconques des équations données.

On peut aussi trouver P directement, de cette manière : retranchant la troisième des équations (1) de la seconde, la troisième de la première, la seconde de la première, on obtient

$$\frac{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N')}=\frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N'+\frac{1}{2}N''-P\right),$$

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(N''-N)}=\frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N''-P\right),$$

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}}{2\sin\frac{1}{2}(N'-N)}=\frac{e}{p}\sin\left(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N'-P\right):$$

deux quelconques de ces équations, à l'aide du § I, donnent les valeurs de P et de $\frac{e}{p}$; et ensuite une quelconque des équations (1) donne les valeurs de e et de p.

Combinant la première équation avec la troisième, et posant

$$\tang \zeta = \frac{\frac{r'}{r} - 1 \,.\, \sin\frac{1}{2}(N'' - N')}{1 - \frac{r'}{r''} \cdot \sin\frac{1}{2}(N' - N)},$$

on a

$$\tang\left(\frac{1}{4}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{4}N'' - P\right) = \tang(45° + \zeta)\tang\frac{1}{4}(N'' - N);$$

P étant connu, on a

$$p = \frac{rr'[\cos(N - P) - \cos(N' - P)]}{r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P)}.$$

Pour adapter ces formules au calcul logarithmique, on écrit l'identité

$$\begin{aligned} r\cos(N - P) - r'\cos(N' - P) &= [r\cos(N - H) - r'\cos(N' - H)]\cos(H - P) \\ &\quad - [r\sin(N - H) - r'\sin(N' - H)]\sin(H - P), \end{aligned}$$

où H est arbitraire.

Posant

$$r\cos(N - H) - r'\cos(N' - H) = a\cos(A - H),$$
$$r\sin(N - H) - r'\sin(N' - H) = a\sin(A - H),$$

équations qui déterminent a et A; ensuite

$$p = \frac{2rr'\sin\frac{1}{2}(N' - N)\sin\left[\frac{1}{2}(N' + N) - P\right]}{a\cos(A - P)},$$

$$e = \frac{r' - r}{a\cos(A - P)}.$$

Si l'on prend

$$H = \frac{1}{2}(N + N'),$$

l'angle A est donné par l'équation

$$\tang\left(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N'\right)=\frac{r'+r}{r'-r}\tang\frac{1}{2}(N'-N),$$

et l'on a de suite

$$e=-\frac{\cos\left(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N'\right)}{\cos\frac{1}{2}(N'-N)\cos(A-P)}.$$

(Gauss, *Theoria motus corporum cœlestium*, pag. 86.)