NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN BARJOU

Grand concours de 1852

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 355-363

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__355_1>

GRAND CONCOURS DE 1852;

PAR M. BARJOU (JEAN),

Né le 30 octobre 1832, à Gontaud (Lot-et-Garonne), Élève du lycée Saint-Louis (Institution Barbet).

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES [PRIX (*)].

Étant donnés : 1° les distances $FM = r$, $FM' = r'$, $FM'' = r''$ *de trois points* M, M', M'' *d'une conique au foyer* F *de cette courbe ; 2° les angles* MFA, M'FA, M''FA *qui déterminent les positions des rayons vecteurs* FM, FM', FM'', *relativement à une droite fixe* FA, *menée par le foyer dans le plan de la courbe ;*

(*) C'est pour la *première* fois que, depuis l'établissement de l'Université, on n'a pas décerné de *premier* prix. On a *puni* les élèves de leur avoir donné une question banale, mal rédigée, et dont il semble que les auteurs n'aient pas connu toute la portée géométrique :

Quidquid delirant reges, plectuntur Achivi.

On demande :

1°. *De déterminer complétement la courbe, sa nature, sa situation et ses dimensions ;*

2°. *D'appliquer la solution aux données suivantes :*

$$
\begin{aligned}
r &= 0{,}3098011, & \alpha &= 16^\circ\,58'\,32'',3,\\
r' &= 0{,}4094501, & \alpha' &= 117^\circ\,22'\,40'',5,\\
r'' &= 0{,}4373418, & \alpha'' &= 222^\circ\,12'\,35''.
\end{aligned}
$$

Lorsqu'on cherche l'équation d'une conique en coordonnées polaires, un foyer étant pris pour pôle et l'axe focal pour axe polaire, on trouve

$$
(1) \qquad t = \frac{p}{1 - e\cos\omega}.
$$

On sait que, lorsqu'on a pris pour pôle le foyer dont l'abscisse est $-c$, et qu'on a fait tourner le rayon vecteur en prenant la partie positive de l'axe des x pour point de départ, e est positif dans (1) ; e est, au contraire, négatif lorsque les angles étant comptés de la même manière, c'est l'autre foyer qui est pris pour pôle.

Cela posé, il est clair que l'équation de la conique cherchée rapportée au foyer F et à la ligne FA sera

$$
t = \frac{p}{1 - e\cos(\omega + \zeta)},
$$

ζ désignant l'angle inconnu, positif ou négatif, que fait FA avec l'axe focal. Les conditions du problème nous donnent les équations

$$
r = \frac{p}{1 - e\cos(\alpha + \zeta)},
$$

$$
r' = \frac{p}{1 - e\cos(\alpha' + \zeta)},
$$

$$
r'' = \frac{p}{1 - e\cos(\alpha'' + \zeta)}.
$$

Ces équations nous serviront à déterminer les trois inconnues p, e et ζ. Le problème n'admettra généralement qu'un nombre limité de solutions.

Commençons par éliminer p et e, il vient

$$(2)\; p = r - re\cos(\alpha+\zeta) = r' - r'e\cos(\alpha'+\zeta) = r'' - r''e\cos(\alpha''+\zeta);$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} e = \dfrac{r'-r}{r'\cos(\alpha'+\zeta) - r\cos(\alpha+\zeta)} \\ \quad = \dfrac{r''-r}{r''\cos(\alpha''+\zeta) - r\cos(\alpha+\zeta)}. \end{cases}$$

Chassant les dénominateurs dans la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned} &r''(r'-r)\cos(\alpha+\zeta) - r'(r''-r)\cos(\alpha'+\zeta) \\ &+ r(r''-r')\cos(\alpha+\zeta) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on développe $\cos(\alpha''+\zeta)\ldots$, on voit que tous les termes contiendront, soit $\cos\zeta$, soit $\sin\zeta$, et pas d'autres lignes trigonométriques; divisant donc par $\cos\zeta$, il vient

$$\begin{aligned} &r''(r'-r)(\cos\alpha'' - \sin\alpha''\operatorname{tang}\zeta) \\ &- r'(r''-r)(\cos\alpha' - \sin\alpha'\operatorname{tang}\zeta) \\ &+ r(r''-r')(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tang}\zeta) = 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{r''(r'-r)\cos\alpha'' - r'(r''-r)\cos\alpha' + r(r''-r')\cos\alpha}{r''(r'-r)\sin\alpha'' - r'(r''-r)\sin\alpha' + r(r''-r')\sin\alpha}.$$

Connaissant l'angle ζ, ou plutôt sa plus petite valeur, qui sera positive ou négative, d'après les signes de sa tangente, l'axe focal sera déterminé. Mais cela ne détermine pas la position de la courbe. Cependant ses dimensions sont faciles à calculer : l'équation (3) donnera e, et l'équation (2) donnera p.

Si, au lieu de considérer la plus petite valeur de ζ, on prenait $\zeta + 180$, on voit que l'axe focal serait toujours le même; e changerait de signe, et p conserverait son ancienne valeur. Avec un peu d'attention, on se rend compte de ce changement de signe de e. Cela tient, et à ce que nous avons dit au commencement sur le signe de e, et aussi à ce qu'en prenant $\zeta + 180$, au lieu de ζ, l'origine des angles est reportée 180 degrés plus loin.

Théoriquement, la question n'est pas encore complétement résolue; il faudrait connaître les conditions auxquelles les données doivent satisfaire pour que la conique soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Pour cela, il suffirait d'exprimer que le rapport focal est inférieur, supérieur ou égal à l'unité. On aurait aussi à chercher les conditions nécessaires pour que la courbe soit rapportée à tel foyer ou à tel autre. Ces recherches n'offriraient aucune difficulté, et elles ne peuvent être d'aucune utilité dans la pratique.

Discussion. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les angles α, α', α'' étaient comptés dans un certain sens déterminé; mais on peut compter ces angles dans quatre sens différents, de là quatre positions de la courbe dans son plan. Dans la pratique, en astronomie par exemple, le sens dans lequel on compte les angles est parfaitement déterminé, ainsi que leur origine; il est le même que celui du mouvement de l'astre observé, alors il ne peut y avoir qu'une seule solution (*).

Il reste à discuter quelques cas particuliers :

Si l'on avait $r = r' = r''$, on aurait $\tang \zeta = \frac{0}{0}$: il y aurait véritablement indétermination, car la conique est un cercle ($e = 0$).

(*) Lorsqu'on assujettit les trois points a etre sur la même branche, il n'y a qu'une solution; c'est ce qui a lieu en astronomie. Cette restriction n'existe pas en geometrie. Les trois points, pris deux a deux, peuvent se trouver sur une branche, et le troisieme point sur la seconde branche, ce qui donne trois hyperboles; en tout quatre solutions. La premiere solution est une des trois coniques; et elle n'est astronomique que lorsque la courbe renferme le foyer. T M

Si l'on avait $r = r'$, on aurait

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha'}{\sin \alpha + \sin \alpha'} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}} = -\operatorname{tang} \frac{\alpha + \alpha'}{2}.$$

Ce résultat était facile à prévoir d'après la forme bien connue des courbes du deuxième degré.

Application. Nous avons trouvé

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{r''(r' - r)\cos\alpha'' - r'(r'' - r)\cos\alpha' + r(r'' - r')\cos\alpha}{r''(r' - r)\sin\alpha'' - r'(r'' - r)\sin\alpha' + r(r'' - r')\sin\alpha}.$$

Je laisserai tang ζ sous cette forme, parce que c'est celle qui exige le moins de logarithmes et le plus petit nombre d'opérations préliminaires. Je ne la rendrai pas calculable par logarithmes, parce que cette opération serait d'abord assez pénible, exigerait un nombre plus grand de logarithmes et donnerait moins d'exactitude.

On a

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{-m + n + p}{-m' - n' + p'},$$

en mettant les signes en évidence pour la question présente.

Opérations préliminaires :

$$\pi - \alpha' = 62^\circ 37' 19'',5,$$
$$\alpha'' - \pi = 42^\circ 12' 35'',$$
$$r' - r = 0,0996490, \quad r'' - r = 0,1275407,$$
$$r'' - r' = 0,0278917.$$

Calcul de m.	*Calcul de m'.*
$\log m = \log r'' + \log(r' - r) + \log\cos\alpha'' - 10$	
$\log r'' = \bar{1},6408210$	$\bar{1},6408210$
$\log(r' - r) = \bar{2},9984729$	$\bar{2},9984729$
$\log\cos\alpha'' = 9,8696368$	$\log\sin\alpha'' = 9,8272699$
$\log m = \bar{2},5089307$	$\log m' = \bar{2},4665638$

d'où

$$m = 0,0322798 \qquad m' = 0,029280$$

On voit que pour calculer m et m', il n'y a que six logarithmes à chercher; on doit avoir soin, lorsqu'on cherche $\cos\alpha''$, de prendre aussi $\sin\alpha''$. On ne trouve pas dans la Table l'angle α'', nous nous sommes servis de $\alpha'' - \pi$, en tenant compte des signes. Au moyen des Tables de parties proportionnelles, on voit que l'on n'est sûr que des six premiers chiffres significatifs de la valeur de m ou de m'.

Calcul de n.

$$\log n = \log r' + \log(r'' - r) + \log\cos\alpha' - 10$$

$$\begin{aligned} \log r' &= \bar{1},6122010 \\ \log(r'' - r) &= \bar{1},1056489 \\ \log\cos\alpha' &= 9,6626215 \\ \hline \log n &= \bar{2},3804714 \end{aligned}$$

donc

$$n = 0,0240144$$

Calcul de n'.

$$\log n' = \log r' + \log(r'' - r) + \log\sin\alpha' - 10$$

$$\begin{aligned} & \bar{1},6122010 \\ & \bar{1},1056489 \\ \log\sin\alpha' &= 9,9484099 \\ \hline \log n' &= \bar{2},6662598 \end{aligned}$$

$$n' = 0,046372$$

Calcul de p.

$$\log p = \log r + \log(r'' - r') + \log\cos\alpha - 10$$

$$\begin{aligned} \log r &= \bar{1},4910829 \\ \log(r'' - r') &= \bar{2},4454758 \\ \log\cos\alpha &= 9,9806527 \\ \hline \log p &= \bar{3},9172106 \\ p &= 0,0082644 \\ -m + n + p &= 0,0000010 \end{aligned}$$

Calcul de p'.

$$\log p' = \log r + \log(r'' - r') + \log\sin\alpha - 10$$

$$\begin{aligned} & \bar{1},4910829 \\ & \bar{2},4454750 \\ \log\sin\alpha &= 9,4653308 \\ \hline \log p' &= \bar{3},4018887 \\ p' &= 0,0025228 \\ -m' - n' + p' &= -0,073129 \end{aligned}$$

On ne peut pas affirmer que l'angle ζ est nul, mais comme le numérateur est inférieur à l'erreur que l'on pouvait commettre (15), c'est-à-dire est très-petit, tandis que le dénominateur est relativement très-considérable, ζ est négligeable ; après cette omission, les valeurs de p et de e seront aussi exactes. Posons donc $\zeta = 0$, cela revient à dire que la droite FA est l'axe focal de la conique. Cela posé, on a

$$e = \frac{r' - r}{r' \cos \alpha' - r \cos \alpha} = - \frac{r' - r}{r' \cos (\pi - \alpha') + r \cos \alpha},$$

$$\log e = \log (r' - r) - \log (r' \cos \alpha' - r \cos \alpha);$$

or

$$r' \cos \alpha' = -0,18829, \quad r \cos \alpha = 0,29630,$$

$$- r' \cos \alpha' + r \cos \alpha = 0,48459,$$

donc

$$\log (-e) = \log (r' - r) + \log 0,48459$$

$$\begin{array}{r} \log (r' - r) = \bar{2},9984729 \\ + \log 0,48459 = \bar{1},6853744 \\ \hline \log (-e) = \bar{1},3130985 \end{array}$$

donc

$$e = -0,2056.$$

Je m'arrête ici au quatrième chiffre significatif de la valeur de e, parce que je ne suis pas sûr des autres chiffres. En effet, le nombre 0,48459 n'est connu qu'à moins d'une unité du dernier chiffre significatif ; par suite, son logarithme peut être fautif de $90 + \frac{1}{2}$ unités du septième ordre décimal ; le $\log (-e)$ est donc entaché d'une erreur qui a pour limite $91 + \frac{1}{2}$ unités du septième ordre décimal (car l'erreur commise sur $\log (r' - r)$ a pour limite une unité du septième ordre décimal). Donc, d'après une théorie que je n'expliquerai pas (*), l'erreur commise sur

---

(*) Voir *Usage des Tables de parties proportionnelles.*

e a pour limite $\dfrac{9^1 + \frac{1}{2}}{\Delta}$, Δ étant la différence tabulaire;

ici $\Delta = 213$, donc $E < \dfrac{9^1 + \frac{1}{2}}{213}$, $E < \dfrac{9^2}{213}$, $E < \frac{1}{2}$. Ainsi on pourrait prendre $-0,20563$ qui serait entaché d'une erreur ayant pour limite $\frac{1}{2}$ unité du dernier chiffre significatif.

Quant au demi-paramètre, on le calculera facilement:

$$p = r - re \cos \alpha = r + r \cos \alpha \times 0,20563;$$

or

$$r \cos \alpha = 0,29630, \ \log r \cos \alpha + \log(-e) = \bar{2},7848341;$$

donc

$$re \cos \alpha = +0,060930,$$

à moins d'une unité du cinquième chiffre significatif; par suite,

$$p = 0,37073,$$

à moins d'une demi-unité du dernier chiffre. Nous voyons que e est < 1; *donc la courbe est une ellipse* ayant FA pour axe focal; *e est négatif, donc le point* F *est le foyer qui est placé par rapport au centre du même côté que l'origine des angles.* Il faudra donc connaître cette origine.

Note. Nous avons insere cette solution (*), qu'on trouve partout, *uniquement* pour offrir un exercice de calcul aux elèves, et les engager à se servir de la méthode suivante de Gauss pour verifier les résultats numériques.

En calculant le demi-grand axe par la formule $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$, je trouve

$$a = 0,3870903.$$

(*) *Voir* page 306.

Dans la *Connaissance des Temps* pour 1848, dans un beau travail de M. Le Verrier sur Mercure, on lit (*Additions*, page 116) :

$$e = 0,2056003,$$
$$a = 0,3870984.$$

Ainsi le calcul de M. Barjou est exact pour e jusqu'à la quatrième decimale, et pour a jusqu'à la cinquième décimale. Je n'ai pas trouvé dans les Éphémérides de Mercure de 1846 à 1852, les époques des trois observations. Il serait facile de les découvrir d'après le mouvement connu de la planète.

Ce problème a été résolu la première fois par Halley (*Methodus directa et geometrica cujus ope investigatur aphelia, etc.*; *Transactions philosophiques*, 1676, n° 128); il emploie dans sa solution l'hyperbole. En effet, la position du second foyer se determine par l'intersection de deux hyperboles uniconfocales et par l'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole uniconfocale, intersections qui s'opèrent par la voie géométrique; le foyer cherché a quatre positions differentes.

De la Hire a ramené le problème à la *directrice*, question de Géométrie elementaire (*Sectiones conicæ*, lib. VIII, prop. XXV. Paris, 1685; in-fol.).

Newton cite cette solution et la donne légèrement modifiée (*Ph. nat. principia*, lib. I, prop. XXI, scholium; 1687).

Je ne sais qui le premier a mentionné les quatre solutions.

M. Comte les donne très-bien (*), et Cirodde moins bien. Les formules sont très-connues. Les savants auteurs de la question, calculateurs par état, n'attachant de l'importance qu'au calcul, n'ont eu en vue qu'un concours de *calculs;* soit. Alors, comme certains concurrents pouvaient connaître les formules et d'autres les ignorer et être obligés de les chercher, il fallait communiquer ces formules à tous pour les transformer en résultats numériques d'après les données de la question. Voilà ce qu'exigeait la justice. Sans cesse on prêche la morale aux jeunes gens; infiniment mieux vaudrait-il leur en donner sans cesse l'exemple. Or, la justice est une branche essentielle de la morale, et surtout de la morale publique : *res et non verba*.

(*) COMTE, *Géométrie analytique*, page 274; 1843.