Nouvelles annales de mathématiques

P. Tardy

Solution générale de la question 232 (Prouhet)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 345-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__345_0>

SOLUTION GENERALE DE LA QUESTION 232 (PROUHET)

(voir t X, p 182),

Par M. P. TARDY,
Professeur à Gênes.

P_0 étant l'aire d'un polygone convexe de n côtés; P_1 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du premier polygone; P_2 l'aire d'un polygone ayant pour sommets les milieux des côtés du second polygone, et ainsi de suite; il s'agit de démontrer qu'on a

$$
(A)\quad \left\{
\begin{aligned}
& P_0 - \frac{n^2-2^2}{1.2.3}P_1 + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}P_2 - \ldots \\
& + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)} P_{\frac{n-2}{2}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

si n est pair, et

$$
(B)\quad \left\{
\begin{aligned}
& P_0 - \frac{n^2-1^2}{1.2}P_1 + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}P_2 - \ldots \\
& + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{1.2.3\ldots(n-1)} P_{\frac{n-1}{2}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

si n est impair.

Lemme. Soit la série hypergéométrique

$$
(a)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = 1 - \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\delta}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}x \\
& + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{\delta(\delta+1)}\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2 - \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En mettant $\alpha+1$ pour α et $\beta+1$ pour β, et ôtant la série primitive, on obtient la relation

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ -\frac{\gamma}{\varepsilon}\cdot\frac{\alpha+\beta+1}{\delta}x.\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1). \end{array}\right.$$

De la même manière on aura

$$\begin{array}{l} \varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta\,\varepsilon)=\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ \quad +M\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1), \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{l} \varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi+\lambda_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1) \\ \quad +\lambda_2\varphi(\alpha,\beta+2,\gamma+2,\delta+2,\varepsilon+2); \end{array}$$

et en général par une continuelle application de la relation (b), on arrive à cette formule

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(\alpha+m,\beta+m,\gamma,\delta,\varepsilon)=\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \\ +A_1\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,\delta+1,\varepsilon+1)+\ldots \\ +A_m\varphi(\alpha,\beta+m,\gamma+m,\delta+m,\varepsilon+m). \end{array}\right.$$

De là nous pouvons conclure que si pour des valeurs particulières de x, α, β, γ, δ, ε, on a

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=0,$$

et

$$\varphi(\alpha,\beta+\mu,\gamma+\mu,\delta+\mu,\varepsilon+\mu)=0,$$

μ désignant un entier quelconque, la série (a) sera toujours nulle, lorsque sans changer x, γ, δ, ε, on augmente α et β d'un entier m à volonté.

Cela posé, soient x_1, y_1, x_2, y_2,..., x_n, y_n les coordonnées des n sommets du polygone donné; les coordonnées des sommets du premier polygone inscrit seront

$$\frac{x_1+x_2}{2},\quad \frac{y_1+y_2}{2};\quad \frac{x_2+x_3}{2},$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}\ldots\ldots,\quad \frac{x_n+x_1}{2},\quad \frac{y_n+y_1}{2};$$

celles des sommets du second polygone inscrit seront

$$\frac{x_1+2x_2+x_3}{4},\quad \frac{y_1+2y_2+y_3}{4},\ldots,$$
$$\frac{x_n+2x_1+x_2}{4},\quad \frac{y_n+2y_1+y_2}{4};$$

et en général en appelant $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ les coordonnées du sommet (q) du polygone inscrit de l'ordre (p), nous aurons

$$x_q^{(p)}=\frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l}\quad(p)_0.x_q+(p)_1.x_{q+1}+(p)_2.x_{q+2}+\ldots\\ +(p)_{p-1}.x_{q+p-1}+(p)_p.x_{q+p}\end{array}\right],$$
$$y_q^{(p)}=\frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l}\quad(p)_0.y_q+(p)_1.y_{q+1}+(p)_2.y_{q+2}+\ldots\\ +(p)_{p-1}.y_{q+p-1}+(p)_p.y_{q+p}\end{array}\right],$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$(p)_m=\frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2.3\ldots m},$$

et où il faut prendre les indices de x et de y égaux au reste de leur division par n toutes les fois qu'ils deviennent plus grands que n.

Si nous supposons $p<n$, puisqu'on a $(p)_m=0$ pour $m>p$, nous pouvons écrire les valeurs des coordonnées $x_q^{(p)}$, $y_q^{(p)}$ ainsi :

$$x_q^{(p)}=\frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l}\quad(p)_0x_q+(p)_1x_{q+1}+\ldots\\ +(p)_{n-q}x_n+(p)_{n-q+1}x_1+\ldots+(p)_{n-1}x_{q-1}\end{array}\right],$$
$$y_q^{(p)}=\frac{1}{2^p}\left[\begin{array}{l}\quad(p)_0y_q+(p)_1y_{q+1}+\ldots\\ +(p)_{n-q}y_n+(p)_{n-q+1}y_1+\ldots+(p)_{n-1}y_{q-1}\end{array}\right].$$

Maintenant on sait que la surface P_p est donnée par l'expression

$$P_p=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}x_1^{(p)}y_2^{(p)}-x_2^{(p)}y_1^{(p)}+x_2^{(p)}y_3^{(p)}-x_3^{(p)}y_2^{(p)}+\ldots\\ +x_n^{(p)}y_1^{(p)}-x_1^{(p)}y_n^{(p)}\end{array}\right\}.$$

En substituant pour ces coordonnées leurs valeurs, et cherchant le coefficient θ_s du terme général $x_q y_{q+s}$, on trouvera, avec un peu d'attention,

$$\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{array}{l} \quad (p)_0 (p)_{s-1} + (p)_1 (p)_s + (p)_2 (p)_{s+1} + \ldots + (p)_{n-s} (p)_{n-1} \\ + (p)_{n-s+1} (p)_0 + (p)_{n-s+2} (p)_1 + \ldots + (p)_{n-1} (p)_{s-2} \\ - (p)_0 (p)_{s+1} - (p)_1 (p)_{s+2} - \ldots - (p)_{n-s-2} (p)_{n-1} \\ - (p)_{n-s-1} (p)_0 - (p)_{n-s} (p)_1 - \ldots - (p)_{n-1} (p)_s \end{array} \right.$$

Observons que ce coefficient est indépendant de q et dépend seulement de s; qu'il s'évanouit pour $s = 0$ et pour $s = \frac{n}{2}$ dans le cas que n soit pair; qu'il revient le même si la différence entre les indices de y et de x est $s - n$; qu'il change de signe si cette différence devient $-s$, ou $n - s$.

Il n'est donc pas nécessaire de l'évaluer au delà de $s = \frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou de $s = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

Pourtant si nous dénotons par A_s la somme des termes dans lesquels la différence entre les indices soit égale à s, ou à $s - n$, diminuée de la somme de ceux dans lesquels cette différence soit $-s$ ou $n - s$; c'est-à-dire si nous posons

$$\begin{aligned} A_s = {} & x_1 y_{s+1} + x_2 y_{s+2} + \ldots + x_{n-s} y_n + x_{n-s+1} y_1 + \ldots + x_n y_s \\ & - x_{s+1} y_1 - x_{s+2} y_2 - \ldots - x_n y_{n-s} - x_1 y_{n-s+1} - \ldots - x_s y_n, \end{aligned}$$

il est clair que nous obtiendrons

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \ldots + \theta_{\frac{n-2}{2}} A_{\frac{n-2}{2}} \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

et

$$P_p = \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \ldots + \theta_{\frac{n-1}{2}} A_{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

Maintenant, si nous limitons l'ordre p du dernier polygone inscrit à $\frac{n-2}{2}$ si n est pair, ou à $\frac{n-1}{2}$ si n est impair, les coefficients binomiaux $(p)_{n-s}$, $(p)_{n-s+1}$, $(p)_{n-1}$ s'évanouiront tous, et la valeur de θ_s se réduira à

$$\theta_s = \frac{1}{2^{2p+1}} \left\{ \begin{array}{l} (p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \ldots + (p)_{p-s+1}(p)_p \\ -(p)_0(p)_{s+1} - (p)_1(p)_{s+2} - (p)_2(p)_{s+3} - \ldots - (p)_{p-s-1}(p)_p \\ -(p)_{n-s-1}(p)_0 \end{array} \right\}.$$

De la formule générale

$$\begin{aligned}(u+v)_m = (u)_m(v)_0 + (u)_{m-1}(v)_1 + (u)_{m-2}(v)_2 + \ldots \\ + (u)_1(v)_{m-1} + (u)_0(v)_m\end{aligned}$$

(*Voir* Cauchy, *Cours d'Analyse*, ch. IV, § 3, p. 100; 1821), en faisant

$$u = v = p, \quad m = p - s + 1,$$

et en se rappelant que

$$(u)_\lambda = (u)_{u-\lambda},$$

on tire

$$\begin{aligned}(p)_0(p)_{s-1} + (p)_1(p)_s + (p)_2(p)_{s+1} + \ldots \\ + (p)_{p-s+1}(p)_p = (2p)_{p-s+1},\end{aligned}$$

et en faisant $m = p - s - 1$,

$$(p)_0(p)_{s+1} + (p)_1(p)_{s+2} + \ldots + (p)_{p-s-1}(p)_p = (2p)_{p-s-1},$$

où l'on voit qu'il faut prendre $(2p)_{-1} = 0$.

Le dernier terme de θ_s $(p)_{n-s-1}(p)_0$ sera toujours nul, excepté le cas de $s = \frac{n-1}{2}$, parce qu'alors il devient $(p)_{\frac{n-1}{2}}$ et pour $p = \frac{n-1}{2}$ est égal à l'unité.

De cette manière, nous aurons

$$\begin{aligned}2^{2p+1}P_p = A_1[(2p)_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-1} - (2p)_{p-}\ ] + \ldots \\ + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \ldots \\ + A_{\frac{n-2}{2}} \cdot (2p)_{p-\frac{n-4}{2}}, \quad n \text{ pair};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{2p+1}P_p = A_1[\ 2p)_p - (2p)_{p-2}] + A_2[(2p)_{p-3}] + \ldots \\ + A_{1+k}[(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2}] + \ldots \\ + A_{\frac{n-1}{2}}\left[(2p)_{p-\frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}}\right], \quad n \text{ impair}.\end{aligned}$$

Ayant égard ensuite à l'égalité

$$(2p)_{p-k} - (2p)_{p-k-2} = 2 \cdot \frac{(2p+1)(1+k)}{(p-k-1)(p-k)} \cdot (2p)_{p-k-2}$$
$$= 2 \cdot \frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1},$$

nous pouvons écrire

$$2^{2p} P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1} . A_1 + \frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2} . A_2 + \ldots$$
$$+ \frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1} . A_{1+k} + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{n-4}{2}}{p - \frac{n-6}{2}}(2p+1)_{p-\frac{n-4}{2}} . A_{\frac{n-4}{2}}$$
$$+ \frac{\frac{n-2}{2}}{p - \frac{n-4}{2}}(2p+1)_{p-\frac{n-2}{2}} . A_{\frac{n-2}{2}},$$

si n est pair ; et

$$2^{2p} P_p = \frac{1}{p}(2p+1)_{p-1} . A_1 + \frac{2}{p-1}(2p+1)_{p-2} . A_2 + \ldots$$
$$+ \frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1} . A_{1+k} + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{n-3}{2}}{p - \frac{n-5}{2}}(2p+1)_{p-\frac{n-3}{2}} . A_{\frac{n-3}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(2p)_{p-\frac{n-3}{2}} - (p)_{\frac{n-1}{2}}\right] A_{\frac{n-1}{2}},$$

si n est impair.

Dans ces équations, il faut substituer au coefficient d'un terme quelconque du second membre, par exemple de A_{1+k}, c'est-à-dire à la quantité $\frac{1+k}{p-k}(2p+1)_{p-k-1}$, $\frac{1}{2}(2p)_{p-k} = \frac{1}{2}$ lorsque p devient égal à k.

En opérant ces substitutions dans les formules (A), (B), et en réfléchissant que P_k sera la première à introduire le terme A_{1+k}, on aura, dans le cas de n pair, pour coefficient de A_{1+k} la série suivante :

$$(-1)^k \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)\ldots[n^2-(2k)^2]}{1.2.3\ldots(2k+1)} \cdot \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{n^2-(2k+2)^2}{(2k+2)(2k+3)} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{1+k}{1} \cdot (2k+3)_0 \\ + \dfrac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2]}{(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\ \times \dfrac{1}{2^3} \cdot \dfrac{1+k}{2}(2k+5)_1 - \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}-k} \\ \times \dfrac{[n^2-(2k+2)^2][n^2-(2k+4)^2]\ldots[n^2-(n-2)^2]}{(2k+2)(2k+3)\ldots(n-1)} \\ \times \dfrac{1}{2^{n-2k-3}} \cdot \dfrac{1+k}{\frac{n-2}{2}-k}(n-1)^{\frac{n-2k-4}{2}} \end{array} \right\}.$$

Considérons la série entre parenthèses, et faisons $\frac{n}{2} = r$; elle pourra se mettre sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{r-k-1}{1} \cdot \dfrac{r+k+1}{2k+3} \\ + \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)}{1.2} \cdot \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \\ - \dfrac{(r-k-1)(r-k-2)(r-k-3)}{1.2.3} \\ \times \dfrac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} + \ldots \end{array} \right.$$

La plus petite valeur que r peut recevoir pour une valeur donnée de k est évidemment $k+2$, parce que, pour arriver à P_k, il faut que le dernier indice de P dans la formule (A), c'est-à-dire $\frac{n-2}{2}$, soit au moins $=k$. Or, je dis que la série (1) est toujours égale à zéro. En effet, elle est un cas particulier de la série (a) du lemme, celui dans lequel on poserait

$$\alpha=r-k-1,\quad \beta=r+k+1,\quad \delta=2k+3,\quad \gamma=\varepsilon=x=1;$$

de plus, on voit tout de suite qu'elle est nulle pour $r=k+2$, et nulle aussi lorsqu'on augmente β, δ, γ, ε d'un nombre entier quelconque m; on en conclut donc par le lemme qu'elle s'évanouira pour des valeurs quelconques entières de r et de k, pourvu que $r \geqq k+2$.

De cette manière, la première formule (A) est complétement démontrée.

Passons au cas de n impair.

En faisant la substitution de l'autre valeur de P_p dans le premier membre de l'équation (B), on en tirera pour le coefficient de A_{1+k},

$$(-1)^k \frac{1}{2^{2k+1}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[(n^2-(2k-1)^2]}{1.2.3\ldots(2k)}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 1-\dfrac{n^2-(2k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1+k}{1}\,(2k+3)_0 \\[2ex] +\dfrac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k-3)^2]}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \\[2ex] \times\dfrac{1}{2^3}(2k+5)_1\,.\,\dfrac{1+k}{2}+\ldots \\[2ex] +\dfrac{[n^2-(2k+1)^2][n^2-(2k+3)^2]\ldots[(n^2-(n-2)^2]}{(2k+1)(2k+2)\ldots(n-1)} \\[2ex] \times\dfrac{1}{2^{n-2k-2}}\cdot\dfrac{1+k}{\frac{n-1}{2}-k}\cdot(n)_{\frac{n-3}{2}-k} \end{array} \right\}.$$

Cette valeur n'est pas exacte pour $k = \frac{n-3}{2}$, et nous aurons, au lieu de celle-ci, pour la valeur du coefficient de $A_{\frac{n-1}{2}}$, la quantité suivante

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2) \ldots [n^2-(n-4)^2]}{1.2 \ldots (n-3)} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \\
&+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2) \ldots [n^2-(n-2)^2]}{1.2.3 \ldots (n-1)} \\
&\times \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n-2}{1} \left(\frac{n-1}{2}\right)_0,
\end{aligned}
$$

qui est évidemment zéro.

Prenons la série entre parenthèses du coefficient de A_{1+k} et mettons $\frac{n-1}{2} = r$; en réduisant, on verra qu'elle peut se présenter sous la forme

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{r-k}{1} \cdot \frac{r+k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+3}{2k+1} + \frac{(r-k)(r-k-1)}{1.2} \\
&\times \frac{(r+k+1)(r+k+2)}{(2k+3)(2k+4)} \cdot \frac{(2k+3)(2k+5)}{(2k+1)(2k+3)} \\
&- \frac{(r-k)(r-k-1)(r-k-2)}{1.2.3} \\
&\times \frac{(r+k+1)(r+k+2)(r+k+3)}{(2k+3)(2k+4)(2k+5)} \\
&\times \frac{(2k+3)(2k+5)(2k+7)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} + \ldots
\end{aligned}
$$

On déduit aussi cette série de celle du lemme en prenant

$$\alpha = r-k, \quad \beta = r+k+1, \quad \gamma = \frac{2k+3}{2},$$

$$\delta = 2k+3, \quad \varepsilon = \frac{2k+1}{2}, \quad x = 1.$$

La plus petite valeur de r est $k+2$, et l'on vérifie tout de suite que pour cette valeur la série se réduit à zéro, et qu'elle reste égale à zéro en augmentant β, γ, δ, ε d'un nombre entier m à volonté; par conséquent il en suit qu'elle s'évanouira toujours pour des nombres entiers quelconques r et k, pourvu que $r \geqq k+2$.

Ainsi est entièrement démontrée l'autre formule (B) pour le cas d'un polygone d'un nombre impair de côtés.

Quoique la démonstration précédente nous semble tout à fait rigoureuse, cependant nous croyons que M. Prouhet, qui a proposé cette question, y est parvenu par une voie plus simple (*), et il est à souhaiter qu'il fasse connaître la suite des raisonnements qui l'ont conduit à ces formules. Nous ferons observer, en terminant, que les équations (A) et (B) se vérifient immédiatement si le polygone est régulier. En effet, en désignant par Δ le côté du polygone donné, par Δ_1 le côté du premier polygone inscrit, par Δ_2 celui du second, etc., on aurait alors

$$\Delta_1 = \Delta \sin \frac{(n-2)\pi}{2n}, \quad \Delta_2 = \Delta_1 \sin \frac{(n-2)\pi}{2n} = \Delta \sin^2 \frac{(n-2)\pi}{2n},$$

$$\Delta_3 = \Delta \sin^3 \frac{(n-2)\pi}{2n}, \ldots,$$

et les apothèmes seraient respectivement

$$\frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n}, \quad \frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin \frac{(n-2)\pi}{2n},$$

$$\frac{1}{2}\Delta \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin^2 . \frac{(n-2)\pi}{2n}, \ldots,$$

de manière qu'on aurait en général

$$P_p = \frac{1}{4} n \Delta^2 . \operatorname{tang} \frac{(n-2)\pi}{2n} \sin^{2p} . \frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

(*) La solution de M Prouhet, que nous donnerons, est, en effet, plus simple. Cela ne diminue pas le merite de l'habile emploi que M. Tardy a fait de l'importante serie hypergeometrique. Tm

En substituant dans les formules connues

$$\sin nx = n \sin x \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 2^2}{2.3} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{2.3.4.5} \sin^4 x - \ldots \right]$$

pour n pair, et

$$\cos nx = \cos x \left[1 - \frac{n^2 - 1^2}{2} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{2.3.4} \sin^4 x - \ldots \right]$$

pour n impair, et en prenant $x = \frac{(n-2)\pi}{2n}$, il est clair qu'il en résulterait les formules données par M. Prouhet.