Dieu

Concours d'agrégation aux lycées, année 1850

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 343-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__343_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

PAR M. DIEU,

Agrégé, docteur ès sciences.

Si une courbe à double courbure a sa première courbure constante, le lieu géométrique des centres de courbure se confond avec l'arête de rebroussement de la surface-enveloppe des plans normaux, et réciproquement.

Le rayon de courbure R est donné pour chaque point M (x, y, z) de la courbure par la formule

$$R^2 = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)^3}{(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2},$$

en prenant x pour variable indépendante, et désignant par y', y'', z', z'' les dérivées première et seconde de y et z; et, puisque R est constant, on a

$$(1)\quad \begin{cases} 3(y'y'' + z'z'')[(y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2] \\ -[(y'z''-z'y'')(y'z'''-z'y''')+y''y'''+z''z'''](1+y'^2+z'^2)=0. \end{cases}$$

Le centre de courbure A (ξ, η, ζ) est déterminé pour le point M par l'équation du plan osculateur, celle du plan normal, et la dérivée de cette dernière équation, savoir :

$$(2)\quad (\xi - x)(y'z'' - z'y'') - (\eta - y)z'' + (\zeta - z)y'' = 0,$$

$$(3)\quad \xi - x + (\eta - y)y' + (\zeta - z)z' = 0,$$

$$(4)\quad (\eta - y)y'' + (\zeta - z)z'' = 1 + y'^2 + z'^2;$$

et le point B de l'arête de rebroussement, correspondant à M, dont on peut aussi représenter les coordonnées par ξ, η, ζ, est déterminé par les équations (3), (4), et par la dérivée de l'équation (4),

$$(5) \qquad (\eta - y)\,y''' + (\zeta - z)\,z''' = 3(y'y'' + z'z'').$$

Or, si l'on tire des équations (2), (3), (4) les valeurs de ξ, η, ζ, ou plutôt de $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, puis qu'on substitue celles de $\eta - y$, $\zeta - z$ dans l'équation (5), on trouve que le résultat ne diffère pas de l'équation (1). Donc on déduirait des équations (3), (4), (5) les mêmes valeurs de ξ, η, ζ, et, par conséquent, B *coïncide avec* A, *quel que soit* M, ce qui démontre la proposition directe.

La réciproque n'est pas plus difficile à prouver. En effet, pour que le lieu des centres de courbure se confonde avec l'arête de rebroussement dont il s'agit, il faut et il suffit, d'après ce que nous venons de dire, que la courbe satisfasse à l'équation (1). Mais, en posant

$$1 + y'^2 + z'^2 = u, \quad (y'z'' - z'y'')^2 + y''^2 + z''^2 = v,$$

cette équation devient

$$3\,v\,du - u\,dv = 0,$$

et, en intégrant, on a

$$\frac{u^3}{v} = \text{const.},$$

ou bien

$$R = \text{const.},$$

C. Q. F. D.