DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1851

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__33_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1851 (*);

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Le sujet de cette composition a été :

Trouver l'équation différentielle des courbes planes qui, enroulées sur un cylindre droit à base circulaire, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.

Montrer que, dans le cas particulier où le rayon de première courbure est égal au rayon de la base du cylindre, l'intégration de l'équation différentielle se ramène à une simple quadrature, et discuter la formule.

Mais, comme rien ne nous oblige à des restrictions qui ont sans doute pour cause la brièveté du temps accordé

(*) Ce problème a été aussi résolu par M. Moncourt (Eugène), elève de l'École Normale.

aux candidats, nous substituerons à l'énoncé précédent celui qui suit :

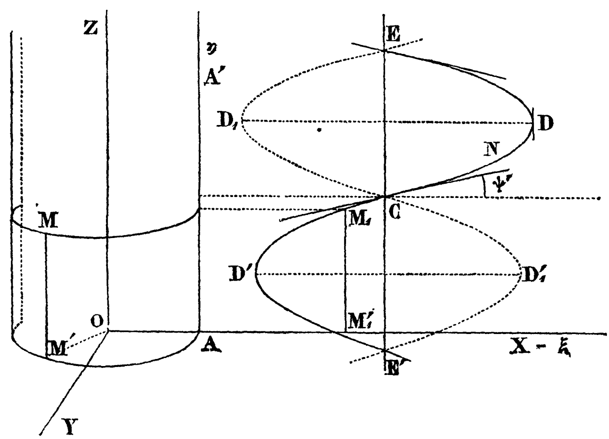
Déterminer les transformées planes des courbes tracées sur un cylindre de révolution, dont le rayon de courbure est constant.

a représentant le rayon constant, les coordonnées rectangulaires des points de ces courbes doivent, d'après une formule connue, satisfaire à l'équation différentielle

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 \\ + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 = \dfrac{ds^6}{a^2}, \end{array} \right.$$

dans laquelle la variable indépendante est quelconque.

L'axe du cylindre étant pris pour axe des z, supposons qu'on développe sa surface sur le plan $\widehat{zx}$, à partir de la génératrice AA', et soit M_1 la position que prend le point M (x, y, z) qui se projetait en M' sur $\widehat{xy}$. Désignons par φ l'angle M'OX, par ξ, η les coordonnées de M_1 relativement à AX et AA', prises pour axes de coordonnées dans le plan $\widehat{zx}$, enfin par R le rayon du cylindre.



On peut regarder l'arc $R\varphi = \xi$ comme la variable indépendante de l'équation (1), et, à ce point de vue, de

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi,$$

on tire

$$dx = -\sin\varphi . d\xi, \quad dy = \cos\varphi . d\xi,$$

$$d^2x = -\frac{\cos\varphi}{R} . d\xi^2, \quad d^2y = -\frac{\sin\varphi}{R} . d\xi^2.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$dz = d\eta, \quad d^2z = d^2\eta \quad \text{et} \quad ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2.$$

D'après ces formules, l'équation (1) donne

$$(2) \quad (d\xi^2 + d\eta^2)\,d\xi^4 + R^2(d^2\eta)^2 d\xi^2 = \frac{R^2}{a^2}(d\xi^2 + d\eta^2)^3,$$

qui représente les transformées planes, et de laquelle on déduit

$$(3) \quad \left(\frac{d\eta'}{d\xi}\right)^2 = (1 + \eta'^2)\left[\frac{(1 + \eta'^2)^2}{a^2} - \frac{1}{R^2}\right],$$

en posant

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'.$$

Les deux valeurs de $\frac{d\eta'}{d\xi}$, données en général par cette équation, deviennent égales et en même temps nulles, pour celles de η' qui sont déterminées par

$$(4) \quad (1 + \eta'^2)^2 - \frac{a^2}{R^2} = 0;$$

et comme ces dernières valeurs, savoir,

$$\eta' = \pm\sqrt{\pm\frac{a}{R} - 1},$$

sont constantes, de telle sorte qu'on en tire

$$\frac{d\eta'}{d\xi} = 0,$$

l'équation (4) est une intégrale singulière de l'équation (3), pourvu qu'elle ne rentre pas dans l'intégrale générale.

Quoi qu'il en soit, l'intégrale générale de l'équation (4), qui est

$$\eta = \pm \xi \sqrt{\pm \frac{a}{R} - 1} + \text{const.},$$

satisfait à l'équation (3), et elle donne, en prenant + devant $\frac{a}{R}$:

1°. Si $a > R$, deux droites correspondantes aux hélices coupant les génératrices du cylindre sous l'angle dont le cosinus est $\sqrt{\frac{a-R}{a}}$, et dont deux se croisent en chaque point de sa surface;

2°. Si $a = R$, une parallèle à $A\xi$ correspondante aux sections circulaires auxquelles les hélices se réduisent quand l'angle atteint 90 degrés;

3°. Si a est infini, une perpendiculaire à $A\xi$ correspondante aux sections rectilignes sur lesquelles on doit tomber quand l'angle est nul.

L'équation (3) étant du premier ordre, on peut immédiatement prendre η' pour variable indépendante. Si l'on pose

$$\eta' = \tang \psi,$$

de sorte que ψ désigne l'angle qu'une parallèle menée de l'origine A, à une partie déterminée de la tangente en chaque point (ξ, η) de la courbe, fait avec $A\xi$, on trouve facilement

$$(5) \qquad d\xi = \pm \frac{a \cos \psi . d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R} \cdot \cos^4 \psi}},$$

à quoi il faut joindre

(6) $$d\eta = \pm \frac{a \sin\psi . d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} . \cos^4\psi}},$$

en prenant ensemble, soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs.

Quelle que soit la valeur du rapport $\frac{a}{R}$, η ne peut s'exprimer sous forme finie, en fonction de ψ, que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions elliptiques; si $\frac{a}{R} \gtrless 1$, il en est de même de ξ; et seulement lorsque $a = R$, ξ s'exprime par un logarithme.

1°. Soit $a > R$. ψ' étant le plus petit arc positif dont le cosinus soit $\sqrt{\frac{R}{a}}$, $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ sont imaginaires pour les valeurs de ψ de o à ψ', réels pour les valeurs de ψ' à $\pi - \psi'$, puis redeviennent imaginaires quand ψ dépasse cette dernière valeur à laquelle on peut s'arrêter.

En posant, pour abréger,

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2} \cos^4\psi} = \Psi,$$

on a

(7) $$\xi = c \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos\psi}{\Psi} d\psi,$$

et

(8) $$\eta = c' \pm a \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\sin\psi}{\Psi} d\psi,$$

c et c' désignant deux constantes arbitraires, qui sont les valeurs de ξ et η pour $\psi = \psi'$.

Si l'on considère premièrement le signe + devant les intégrales définies; lorsqu'on fait croître ψ de ψ' à $\frac{\pi}{2}$, ξ et η croissent depuis les valeurs c et c' [C] jusqu'à de certaines valeurs d et d' [D]; et lorsque ψ croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi-\psi'$, ξ décroît de d à c, tandis que η continue de croître jusqu'à $c'+2(d'-c')=2d'-c'$ [E]. En effet, on a, d'une part,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\psi'}\frac{\cos\psi.d\psi}{\Psi}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'}\frac{\cos\psi.d\psi}{\Psi}=-\int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi.d\psi}{\Psi},$$

d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'}\frac{\cos\psi.d\psi}{\Psi}=0;$$

et, d'autre part,

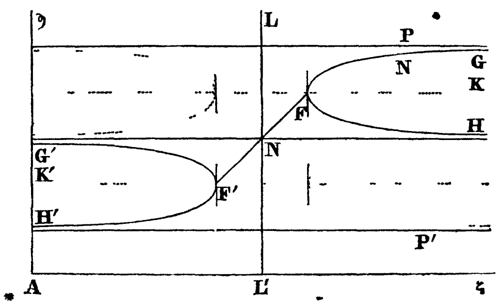
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\psi'}\frac{\sin\psi.d\psi}{\Psi}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi'}\frac{\sin\psi.d\psi}{\Psi}=\int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi.d\psi}{\Psi},$$

d'où

$$\int_{\psi'}^{\pi-\psi'}\frac{\sin\psi.d\psi}{\Psi}=2\int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\psi.d\psi}{\Psi}.$$

La courbe a donc un arc qui va de C à E, à droite de CE parallèle à Aη. Cet arc tourne sa concavité vers la corde CE, et ses deux parties CD, DE sont égales, car l'inclinaison de la tangente sur la corde CE est égale à $\frac{\pi}{2}-\psi'$ au point C, diminue jusqu'en D, où elle devient nulle, puis reprend de D à E, dans un ordre inverse, les mêmes valeurs que C à D. Si l'on passe du signe + au signe — devant les intégrales définies des équations (7) et (8), pour une même valeur de ψ, $\xi - c$ et $\eta - c'$ changent seulement de signes; la courbe a donc un autre arc CD′E′ qui, en tournant de 180 degrés dans le plan autour du point C, irait coïncider avec CDE, et le point C est à la fois un centre et un point d'inflexion.

2°. Soit $a < R$. $\frac{d\xi}{d\psi}$ et $\frac{d\eta}{d\psi}$ ne deviennent imaginaires pour aucune valeur de ψ, et il convient de remplacer, dans les équations (7) et (8), la limite ψ' des intégrales définies par zéro. En prenant successivement les signes $+$ et $-$, les valeurs de ψ, depuis zéro jusqu'à π, donnent un arc pareil à EDCD′E′, mais les tangentes aux points extrêmes sont parallèles à $A\xi$. Les valeurs depuis π jusqu'à 2π donnent un arc égal à celui-là, avec lequel il irait coïncider par une demi-révolution autour de la perpendiculaire à $A\xi$, passant par les points de raccord; et cette droite, ainsi que la parallèle menée a $A\xi$ par le point de croisement des deux arcs, est un axe de symétrie. Enfin, les valeurs de ψ, supérieures à 2π, ne donneraient rien de plus que celles de zéro à 2π, car les intégrales définies $\int_0^{\psi} \frac{\cos\psi . d\psi}{\Psi}$ et $\int_0^{\psi} \frac{\sin\psi \; d\psi}{\Psi}$, sont évidemment des fonctions de ψ, dont les valeurs ne changent pas lorsqu'on augmente ψ de 2π



3°. Soit $a = \text{R}$. On a, d'après les équations (5) et (6),

$$\xi = c \pm \frac{\text{R}}{\sqrt{2}} \cdot \log\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sin^2\psi}}{\sin\psi}\right),$$

et

$$\eta = c' \pm \frac{\text{R}}{\sqrt{2}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}} = c' \pm \frac{\text{R}}{\sqrt{2}}\,\text{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \psi\right).$$

ψ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$:

$$\xi \text{ varie de } \pm\infty \text{ à } c \pm \frac{\text{R}}{\sqrt{2}} \log\left(\sqrt{1} - 1\right);$$

et ψ continuant de croître jusqu'à π, ξ reprend les mêmes valeurs dans l'ordre inverse. η, au contraire, varie toujours dans le même sens depuis c' jusqu'à $c' \pm \text{R}\sqrt{2}.\text{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ [notations de Legendre]. D'après cela, en prenant les signes $+$, on a la branche GFH; et, en prenant les signes $-$, la branche G'F'H'. De plus, les droites FK, F'K', représentées par les équations $\eta = c' \pm \frac{\text{R}}{\sqrt{2}}\text{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des axes de symétrie des deux branches concaves, l'une et l'autre, vers ces droites; les droites N, P et P', représentées par $\eta = c'$ et $\eta = c' \pm \text{R}\sqrt{2}\,\text{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, sont des asymptotes; et le point N (c, c'), où FF' coupe la droite N, est un centre.

Si l'on donne à ψ des valeurs comprises entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$ [k étant un nombre entier quelconque], ξ et η sont réels; et $\psi_{,}$ étant un arc compris entre zéro et π, ξ a des valeurs égales pour $\psi = \psi_{,}$ et $\psi = 2k\pi + \psi_{,}$, tandis que les valeurs correspondantes de η diffèrent de $4k.\frac{\text{R}}{\sqrt{2}}.\text{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On a donc, pour ces valeurs de ψ, une couple de branches, avec lesquelles celles qu'on a d'abord trouvées iraient coïncider, si on les faisait glisser dans le plan, parallèlement à Aη, de manière que les coordonnées η s'accrussent toutes de $4k.\frac{R}{\sqrt{2}}.F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Les courbes que nous venons d'obtenir par la discussion sommaire des trois cas que présentent les deux paramètres a et R, ne cessent pas, en raison de ce que le cylindre est de révolution, d'être des transformées de courbes situées sur le cylindre, et ayant le rayon de courbure constant a, lorsqu'on les fait glisser sur le plan $\widehat{zx}$, de manière que tous leurs points décrivent en même temps des droites parallèles et égales. D'après cela, on peut joindre à l'arc EDD'E', trouvé dans le cas de $a > R$, l'arc E D'D$_{\prime}'$ E', symétrique par rapport à EE'; et aux branches infinies GH, G'H', trouvées dans le cas de $a = R$, les branches symétriques par rapport à la perpendiculaire LL' menée de N à Aξ. On peut aussi *raccorder* les arcs, ou les branches infinies, par les points où les tangentes sont parallèles entre elles, de telle sorte qu'elles viennent se confondre par le *raccord*. Toutes les combinaisons que l'on imaginera donneront toujours des courbes qui satisferont aux équations différentielles (3), (5) et (6), et l'on pourra les déduire des équations (7) et (8), et de celles qui se rapportent au cas de $a = R$, en changeant les constantes arbitraires, les limites des intégrales, ou la manière de prendre les signes doubles.

En résumé, par chaque point M d'un cylindre de révolution de rayon R :

1°. Si $a > R$, il y a deux courbes symétriques par rapport au plan du point M et de l'axe du cylindre, qui jouissent (outre les deux hélices) de la propriété d'avoir le rayon de courbure constant a, pour toute valeur ne dépassant pas $\frac{\pi}{2} - \psi'$ de l'angle sous lequel la courbe devra couper en M la génératrice;

2°. Si $a \overline{\overline{<}} R$, ces deux courbes existent pour toutes les valeurs de cet angle, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; et la section droite du cylindre s'y joint, à cette dernière limite, quand $a = R$ (il n'y a pas d'hélice).

Rectification. — Les équations (5) et (6) donnent

$$ds = \frac{a d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\cos^4\psi}};$$

donc, lorsque $a \gtrless R$, l'arc s ne peut, de même que ξ et η, s'exprimer en fonction de ψ que par une intégrale définie ou par les notations des fonctions elliptiques. Mais, quand $a = R$, on a

$$ds = \frac{R d\psi}{\sin\psi\sqrt{1 + \cos^2\psi}},$$

et il vient, en intégrant,

$$s = \frac{R}{\sqrt{2}}.\log\left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2\psi} - \sqrt{2}.\cos\psi}{\sin\psi}\right),$$

si l'on prend pour l'origine de l'arc s l'un des points où la tangente est perpendiculaire à $A\xi$.

Aire. — Soit d'abord $a \gtrless R$. Si l'on désigne par $\xi_,$, $\eta_,$ les coordonnées d'un point N de l'arc CDE, par rapport aux parallèles menées de C à $A\xi$, $A\eta$, et par A le segment compris entre l'arc CN, une partie correspondante de CE et la parallèle menée de N à $A\xi$; on a

$$dA = \xi_, d\eta_,, \quad \xi_, = a\int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos\psi\, d\psi}{\Psi}, \quad d\eta_, = a.\frac{\sin\psi\, d\psi}{\Psi},$$

en convenant de donner à ψ', lorsque $a > R$, la valeur précédemment indiquée, et de faire $\psi' = 0$ lorsque $a < R$; donc

$$dA = a^2 \frac{\sin\psi\, d\psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos\psi\, d\psi}{\Psi},$$

et, par suite,

$$A_{,} = 2a^2 \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin\psi}{\Psi} \cdot \int_{\psi'}^{\psi} \frac{\cos\psi\, d\psi}{\Psi} \right) d\psi,$$

en représentant par $A_{,}$ l'aire du segment CDE.

Lorsque $a = R$, l'ordonnée, et, par conséquent, l'aire, peuvent s'obtenir en fonction de l'abscisse par une simple quadrature. En effet, l'équation entre ξ et ψ, relative à ce cas, donne

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sin^2\psi}}{\sin\psi} = e^{\pm \alpha \xi_{,}},$$

en mettant α au lieu de $\frac{\sqrt{2}}{R}$, afin d'abréger; par conséquent, on a

$$\sin\psi = \frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha\xi_{,}} + e^{-\alpha\xi_{,}}},$$

puis

$$\operatorname{tang}\psi = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(e^{\alpha\xi_{,}} + e^{-\alpha\xi_{,}})^2 - 8}},$$

et, comme $\operatorname{tang}\psi = \frac{d\eta_{,}}{d\xi_{,}}$, il vient

$$\eta_{,} = C \pm 2\sqrt{2} \int_{\xi_0}^{\xi_{,}} \frac{d\xi_{,}}{\sqrt{(e^{\alpha\xi_{,}} + e^{-\alpha\xi_{,}})^2 - 8}}\ (*),$$

ξ_0 étant une des deux valeurs de $\xi_{,}$ entre lesquelles il faut

(*) C'est par la discussion de cette equation que l'on demandait de reconnaître la forme de la courbe, dans le cas de $a = R$: on trouvera, sans difficulté, la forme représentée par la *fig.* ›.

que cette variable ne tombe pas pour que $\eta_{,}$ soit réelle [ces valeurs, déjà trouvées plus haut, sont $\pm\frac{1}{\alpha}\log(\sqrt{2}-1)$, on les obtient ici en résolvant l'équation $e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}}=2\sqrt{2}$].

Enfin, B désignant le segment compris entre un arc FN, les parallèles menées à $A\xi$ par ses extrémités et la droite LL′, on a

$$B=2\sqrt{2}\int_{\xi_0}^{\xi_{,}}\frac{\xi_{,}\,d\xi_{,}}{\sqrt{(e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}})^2-8}}.$$

Rayon de courbure. — ρ désignant le rayon de courbure, on a, d'après les équations (5) et (6),

$$\rho=\frac{a}{\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}\cos^4\psi}}=\frac{a}{\Psi},$$

en appliquant la formule

$$\rho=\frac{ds^3}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Si $a>R$, ρ est infini pour $\psi=\psi'$ [C]; si $a<R$, $\rho=\frac{aR}{\sqrt{R^2-a^2}}$ pour $\psi=0$ [C]; et, dans ces deux cas, $\rho=a$ pour $\psi=\frac{\pi}{2}$ [D].

Lorsque $a=R$, on a

$$\rho=\pm\frac{R}{\sin\psi.\sqrt{2-\sin^2\psi}};$$

ρ est infini pour $\psi=0$, et $\rho=R$ pour $\psi=\frac{\pi}{2}$ [F]. Enfin, on a, dans ce cas,

$$\rho=\frac{R}{2}\frac{(e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}})^2}{e^{\alpha\xi_{,}}-e^{-\alpha\xi_{,}}},$$

en remplaçant $\sin\psi$ par sa valeur $\frac{2\sqrt{2}}{e^{\alpha\xi_{,}}+e^{-\alpha\xi_{,}}}$.