KORALEK

Formules des fonctions de M. Sturm pour les équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 333-335

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__333_1>

FORMULES DES FONCTIONS DE M. STURM POUR LES ÉQUATIONS DU DEUXIÈME, DU TROISIÈME ET DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. KORALEK,
Professeur.

1. On trouve ordinairement ces fonctions calculées pour des équations tronquées; nous croyons utile de donner ces fonctions pour des équations complètes. On n'aura

besoin que de faire des substitutions numériques pour connaître immédiatement le nombre et les signes des racines réelles.

Équation du deuxième degré.

$$V = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = A_1^2 - 4 A_0 A_2.$$

Équation du troisième degré.

$$V = A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = 2x(A_2^2 - 3 A_1 A_3) + (A_1 A_2 - 9 A_0 A_3),$$
$$V_3 = -4 A_0 A_2^3 A_3 + 18 A_0 A_1 A_2 A_3^2 - 27 A_0^2 A_3^3 + A_1^2 A_2^2 A_3 - 4 A_1^3 A_3^2.$$

Équation du quatrième degré.

$$V = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$
$$V_1 = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$
$$V_2 = px^2 + qx + r, \quad p = 3 A_3^2 - 8 A_2 A_4,$$
$$q = 2 A_2 A_3 - 12 A_1 A_4, \quad r = A_1 A_3 - 16 A_0 A_4,$$
$$V_3 = ax + b,$$
$$16a = (2 A_2 A_3 - 12 A_1 A_4)(9 A_3^3 - 32 A_2 A_3 A_4 + 48 A_1 A_4^2) - (3 A_3^2 - 8 A_2 A_4)(6 A_2 A_3^2 - 16 A_2^2 A_4 - 4 A_1 A_3 A_4 + 64 A_0 A_4^2),$$
$$a = 32 A_0 A_2 A_4^3 - 12 A_0 A_3^2 A_4^2 + 28 A_1 A_2 A_3 A_4^2 - 6 A_1 A_3^3 A_4 - 36 A_1^2 A_4^3 + 2 A_2^2 A_3^2 A_4 - 8 A_2^3 A_4^2,$$
$$16b = (A_1 A_3 - 16 A_0 A_4)(9 A_3^3 - 32 A_2 A_3 A_4 + 48 A_1 A_4^2) - A_4 (3 A_3^2 - 8 A_2 A_4)^2,$$
$$b = -48 A_0 A_1 A_4^3 + 32 A_0 A_2 A_3 A_4^2 - 9 A_0 A_3^3 A_4 + A_1 A_2 A_3^2 A_4 - 4 A_1 A_2^2 A_4^2 + 3 A_1^2 A_3 A_4^2,$$
$$V_4 = b(aq - bp) - a^2 r.$$

Note. Pour connaître le nombre des racines réelles d'une équation algébrique de degré n, il suffit de connaître les coefficients des *premiers* termes des fonctions de M. *Sturm*. Or, ces coefficients se calculent facilement d'après le procédé de M. Cayley (*Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 298; 1846).

Soit l'équation

$$V = x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - p_3 x^{n-3} + .. + (-1)^n p_n.$$

On a

$$V_m = A x^{n-m} + \ldots;$$

représentons par S_t la somme des racines élevées chacune à la puissance t.

Formons les suites

$$Q_m = S_{m-1},$$
$$Q_{m+1} = S_m - p_1 S_{m-1},$$
$$Q_{m+2} = S_{m+1} - p_1 S_m + p_2 S_{m-1},$$
$$Q_{m+3} = S_{m+2} - p_1 S_{m+1} + p_2 S_m - p_3 S_{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_{2m-1} = S_{2m-2} - p_1 S_{2m-3} + p_2 S_{2m-4} + \ldots + (-1)^{m-1} p_{m-1} S_{m-1};$$

on aura

$$A = \text{déterminant} \begin{Bmatrix} S_0, & S_1, & S_2, \ldots, & S_{m-2}, & Q_m \\ S_1, & S_2, \ldots, & S_{m-1}, & Q_{m+1} & \\ S_2, & S_3, \ldots, & S_m, & Q_{m+2} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ S_{m-1}, & S_m, \ldots, & S_{2m-3}, & Q_{2m-1} & \end{Bmatrix}.$$

Tm.