NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. THIOLIER
A. EYRIAUD
L. PAINVIN

Solution de la question 253

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 328-333
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__328_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 253

(voir p. 115);

PAR MM. A. THIOLIER, élève à l'École des Mines à Saint-Étienne;
A. EYRIAUD, élève de Mathematiques supérieures au lycée de Douai;
L. PAINVIN, licencié ès sciences mathématiques.

Étant donnés deux cônes de révolution autour du même axe; un plan tangent au premier cône coupe le second cône suivant une conique, et un plan tangent au second cône coupe le premier cône suivant une seconde conique. Une de ces coniques est égale à la *focale* de l'autre conique. (DIEU.)

Démonstration géométrique.

Je supposerai démontrés les théorèmes suivants :

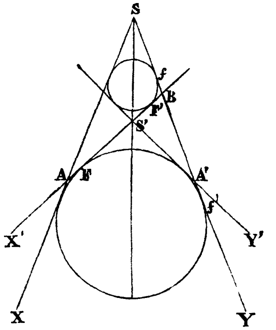
1°. *Le lieu des foyers d'une ellipse, dans l'espace, est une hyperbole ayant son axe transverse égal à la distance des foyers de l'ellipse, et son axe non transverse égal au petit axe de l'ellipse.*

2°. Réciproquement : *Le lieu des foyers d'une hyperbole, dans l'espace, est une ellipse ayant son grand axe égal à la distance des foyers de l'hyperbole, et pour petit axe, l'axe non transverse de l'hyperbole.*

3°. *Le lieu des foyers d'une parabole, dans l'espace, est une parabole égale à la première.*

1^{er} *cas.* Soient SXY le premier cône (*fig.* 1), S′X′Y′ le second. Nous pouvons supposer les deux plans tangents SY et S′X′ perpendiculaires au même méridien.

Fig. 1.



Pour démontrer que la courbe d'intersection du cône SXY par le plan S′X′ est égale à la focale de la courbe d'intersection du cône S′X′Y′ par le plan SY, il suffit de démontrer que

$$A'B = FF',$$

et que

$$\sqrt{\overline{ff'}^2 - \overline{A'B}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{FF'}^2};$$

cela revient à démontrer ces deux égalités, $A'B = FF'$ et $AB = ff'$. Or nous savons que $AF = BF'$, que $Bf = A'f'$. Or, comme $Bf = BF'$, on a

$$AF = BF' = Bf = A'f'.$$

Les deux égalités à démontrer se réduiront donc à une seule; car, si nous considérons l'égalité $FF' = A'B$, elle peut s'écrire

$$FF' + AF + BF' = A'B + Bf + A'f',$$

ou

$$AB = ff'.$$

La question revient donc à démontrer seulement cette dernière égalité.

Or on a

$$\mathrm{BF} = \mathrm{B}f';$$

donc on a aussi

$$\mathrm{BF} + \mathrm{FA} = \mathrm{B}f' + \mathrm{B}f,$$

ou

$$\mathrm{AB} = ff'. \qquad\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2ᵉ *cas.* Le plan tangent au premier cône coupe le second, suivant une parabole.

Il est évident alors que les deux cônes ont des angles au sommet égaux ; alors la simple considération de la symétrie de la figure fait voir clairement que les deux paraboles d'intersection sont égales : il serait du reste facile de faire une démonstration plus rigoureuse.

Démonstration analytique (*).

Je suppose que l'on ne connaisse aucun des théorèmes énoncés au commencement de la démonstration précédente, et je vais faire la démonstration directe de la question proposée.

Considérons deux cas : 1° le plan tangent à l'un des cônes coupera le second suivant une ellipse ou une hyperbole ; 2° il le coupera suivant une parabole.

L'équation générale des sections coniques est

$$y^2 = \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta}\, x - \frac{\sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2\beta}\, x^2,$$

$$\alpha = \mathrm{SAB}, \quad \text{et} \quad 2\beta = \mathrm{ASB}, \quad d = \mathrm{SA}.$$

Considérons le premier cas et rapportons la courbe à son centre ; pour cela il suffira de changer x en $x + a$, ce qui

(*) Ce qui suit appartient à MM. Painvin et Thiolier.

donnera

$$y^2 = \left.\begin{array}{l} \dfrac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta} \\ -\dfrac{2a\sin a\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}\end{array}\right| x - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2 + \begin{array}{l}\dfrac{2d\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}a,\\ -\dfrac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}a^2;\end{array}$$

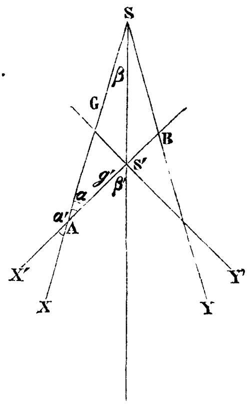
ce qui donne pour l'abscisse du centre

$$a = \frac{d\sin 2\beta}{2\sin(\alpha+2\beta)}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation, on aura

$$\text{(A)} \qquad y^2 + \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta}x^2 = \frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

Fig. 2.



Or nous voyons que si l'on considère maintenant l'intersection du cône $S'X'Y'$ par le plan SX, il suffira de changer α en $360^\circ - \alpha$, β en $\alpha+\beta$ et d en $d\,\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; alors nous aurons

$$\text{(B)} \qquad y^2 - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}x^2 = -\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

On voit facilement que si l'équation (A) représente une ellipse, l'équation (B) représentera une hyperbole, et réciproquement.

Cherchons maintenant le lieu des foyers de la courbe représentée par l'équation (A), et démontrons que son équation est identique à celle de la courbe représentée par l'équation (B).

Soient p, q, r les coordonnées de l'un quelconque des foyers, écrivons que sa distance à l'un des points quelconques de la courbe est une fonction rationnelle entière et du premier degré des coordonnées de ce point, ce qui nous donnera la relation

$$\text{(C)} \qquad (x-p)^2+(y-q)^2+r^2=(my+nx+s)^2,$$

en prenant pour plan des xy le plan de la courbe lui-même, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce plan par le centre de la courbe, pour plans des zx et des zy les plans qui passent par l'axe des z et les axes correspondants de la courbe.

Identifions la relation (C) avec l'équation (A); nous aurons les cinq relations suivantes :

$$(1) \qquad mn=0,$$

$$(2) \qquad \frac{1-n^2}{1-m^2}=\frac{\sin\alpha\sin(\alpha+2\beta)}{\cos^2\beta},$$

$$(3) \qquad \frac{p+ns}{1-m^2}=0,$$

$$(4) \qquad \frac{q+ms}{1-m^2}=0,$$

$$(5) \qquad p^2+q^2+r^2-s^2=-\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha+2\beta)}.$$

La relation (1) donne $m=0$ et $n=0$. Supposons d'abord $m=0$, alors la relation (4) donne $q=0$, ce qui prouve que le lieu sera contenu tout entier dans le plan des zx. La relation (2) donne

$$n = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta)}}{\cos\beta},$$

et, en simplifiant,

$$n = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta}:$$

la relation (3) donne

$$s = -\frac{p\cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Substituant ces valeurs dans la relation (5), nous aurons l'équation du lieu

$$p^2 + r^2 - \frac{p^2\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha + \beta)} = -\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha + 2\beta)},$$

et, en simplifiant,

$$\text{(D)} \qquad r^2 - \frac{\sin\alpha\sin(\alpha + 2\beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)}p^2 = -\frac{d^2\sin\alpha\sin^2\beta}{\sin(\alpha + 2\beta)}.$$

On voit donc que cette équation ne diffère de l'équation (B) que par le nom des variables; elle représente donc un lieu identique. C. Q. F. D.

Note. M. Thiolier démontre de la même manière le cas de la parabole.