NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur le théorème de Goldbach

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 326-328

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__326_1>

NOTE SUR LE THÉORÈME DE GOLDBACH

(voir p. 278)

Le lecteur s'est sans doute aperçu que c'est par inadvertance qu'on a inséré la *prétendue* première démonstration de ce théorème (*). Il faut s'en tenir à celle d'Euler, qui a donné même une plus grande extension à ce théorème qu'il énonce ainsi, mais sans démonstration :

Tout nombre entier qui n'est pas compris dans la formule $4mn - m - n$ est nécessairement compris dans la formule $x^2 + y^2 + y$.

Et il en conclut que l'expression

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + y$$

renferme tous les nombres possibles. En effet, si le nombre est compris dans $4mn - m - n$, il suffit de faire $x = y = 0$; s'il est compris dans $x^2 + y^2 + y$, il faut faire $m = n = 0$, et, d'après le théorème, le nombre doit être compris dans l'une ou dans l'autre expression; il est facile d'ailleurs de démontrer que le même nombre ne peut être renfermé simultanément dans les deux expressions. En effet, on aurait

$$4mn - m - n = x^2 + y^2 + y;$$

on en tire

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4x^2 + (2y + 1)^2;$$

équation impossible; la somme de deux carrés ne peut être divisible par un nombre de la forme $4n - 1$.

Goldbach ajoute qu'on peut ramener $4mn - m - n$ à la forme $y^2 + y - x^2$. En effet, on a

$$\begin{aligned}(4m - 1)(4n - 1) &= (2y + 1)^2 - 4x^2 \\ &= (2y + 2x + 1)(2y - 2x + 1);\end{aligned}$$

on fait

$$x = m - n,$$
$$y = m + n - 1;$$

ainsi tout nombre entier est de la forme $y^2 + y \pm x^2$.

(*) L'équation $n'' = n$ m'a trompé. Il s'agit de $n - n''$; par conséquent, n s'annule, et avec n tout le raisonnement.

c'est-à-dire tout nombre est égal au double d'un nombre triangulaire plus ou moins un carré (le zéro non compris).

Observation. Ce qui précède est dans une Lettre de Goldbach à Euler, datée de Moscou le 7 juin (nouveau style) 1742; *Correspondance mathématique et physique*, tome I, page 125. Les démonstrations sont de M. Lebesgue.