

H. FAURE

Solution de la question 182

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 319-320

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 182

(voir t. VII, p. 137);

PAR M. H. FAURE,

Lieutenant d'artillerie.

Soit F_1 la longueur du quadrant d'une ellipse dont l'excentricité est e , le demi-grand axe étant 1. On aura

$$\int_0^\alpha \frac{E_1 e de}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}} = \frac{\pi \alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (\text{W. ROBERTS.})$$

On sait, d'après Legendre, que l'on a entre les fonctions complètes E_1 , F_1 , la relation

$$E_1 = b^2 \left(F_1 + e \frac{dF_1}{de} \right),$$

où b^2 est le complément de e^2 ; donc

$$\frac{E_1}{1-e^2} = F_1 + e \frac{dF_1}{de}.$$

Le développement de la fonction F_1 , ordonné suivant les puissances ascendantes du module, est, comme on sait,

$$F_1 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} e^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} e^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} e^6 + \dots \right).$$

(*) Ainsi les théorèmes 4 et 5 de M. Stebor (tome IX, page 1/2) sont démontrés. T.M.

On aura donc

$$e \frac{dF_1}{de} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1^2}{2^2} \cdot 2 e^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} 4 e^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} 6 e^6 + \dots \right),$$

donc, en ajoutant, j'aurai

$$\frac{E_1}{1-e^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} 3 e^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} 5 e^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} 7 e^6 + \dots \right);$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha \frac{E_1 \, ede}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^\alpha \frac{ede}{\sqrt{\alpha^2-e^2}} + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2} \int_0^\alpha \frac{e^3 \, de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{4^2 \cdot 4^2} \int_0^\alpha \frac{e^5 \, de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}} \right). \end{aligned}$$

Le terme général de ce développement est de la forme

$$\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1)}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2} \int_0^\alpha \frac{e^{2n+1} \, de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}.$$

Or (voir LACROIX, *Calcul différentiel et intégral*, n° 1165) on a

$$\int_0^\alpha \frac{e^{2n+1} \, de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2n+1} \alpha^{2n+1}.$$

Donc notre terme général se réduit à

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \alpha^{2n+1};$$

par suite,

$$\int_0^\alpha \frac{E_1 \, ede}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}} = \frac{\pi \alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^6 + \dots \right).$$

La quantité entre parenthèse n'est autre chose que

$$(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce qui prouve la relation indiquée.