NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Solution de la question 182

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 319-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__319_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 182

(voir t. VII, p. 157);

PAR M. H. FAURE,

Lieutenant d'artillerie.

Soit E_1 la longueur du quadrant d'une ellipse dont l'excentricité est e, le demi-grand axe étant 1. On aura

$$\int_0^{\alpha} \frac{E_1\, e\, de}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}} = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad \text{(W. ROBERTS.)}$$

On sait, d'après Legendre, que l'on a entre les fonctions complètes E_1, F_1, la relation

$$E_1 = b^2\left(F_1 + e\frac{dF_1}{de}\right),$$

où b^2 est le complément de e^2; donc

$$\frac{E_1}{1-e^2} = F_1 + e\frac{dF_1}{de}.$$

Le développement de la fonction F_1, ordonné suivant les puissances ascendantes du module, est, comme on sait,

$$F_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}e^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}e^4 + \frac{1^2 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2\, 6^2}e^6 + \ldots\right).$$

(*) Ainsi les théorèmes 4 et 5 de M. Strebor (tome IX, page 142) sont démontrés. TM.

On aura donc

$$e\frac{dF_1}{de}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1^2}{2^2}.2e^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}4e^4+\frac{1^2 3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.6e^6+\ldots\right),$$

donc, en ajoutant, j'aurai

$$\frac{E_1}{1-e^2}=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1^2}{2^2}3e^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}5e^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2\,6^2}.7e^6+\ldots\right):$$

donc

$$\int_0^\alpha \frac{E_1 ede}{(1-e^2\sqrt{\alpha^2-e^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^\alpha\frac{ede}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}+\frac{1^2.3}{2^2}\int_0^\alpha\frac{e^3 de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}+\frac{1^2.3^2 5}{4^2.4^2}\int_0^\alpha\frac{e^5 de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}\right).$$

Le terme général de ce développement est de la forme

$$\frac{1^2 3^5.5^2\ldots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2\ldots\qquad(2n)^2}\int_0^\alpha\frac{e^{2n+1} de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}.$$

Or (*voir* Lacroix, *Calcul différentiel et intégral*, n° 1165) on a

$$\int_0^\alpha\frac{e^{2n+1} de}{\sqrt{\alpha^2-e^2}}=\frac{2.4.6\ldots\quad 2n}{3\ 5.7\ldots 2n+1}\alpha^{2n+1}.$$

Donc notre terme général se réduit à

$$\frac{1.3.5\ldots 2n+1}{2.4.6\ldots\quad 2r}\alpha^{2n+1};$$

par suite,

$$\int_0^\alpha\frac{E_1 ede}{(1-e^2)\sqrt{\alpha^2-e^2}}=\frac{\pi\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1.3}{2.4}\alpha^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^6+\ldots\right).$$

La quantité entre parenthèse n'est autre chose que

$$(1-\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce qui prouve la relation indiquée.