

LECOINTE

Solution de la question 228

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 314-316

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__314_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 228

(voir t. IX, p. 298),

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,

De la maison ecclésiastique de Vals

Les trois sommets A , B , C d'un triangle et les trois sommets A' , B' , C' d'un tétraèdre sont donnés; par un point quelconque M dans le plan du triangle ABC , on mène les droites MA , MB , MC ; on prend dans l'espace un point S tel que, dans le tétraèdre $SA'B'C'$, on ait

$$SA' = MA; \quad SB' = MB; \quad SC' = MC;$$

le lieu du point S est une surface du second degré.

(JACOBI.)

Solution. Posons

$$\begin{aligned} BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad MA = f, \\ MB = g, \quad MC = h, \quad A'B' = m, \quad A'C' = n, \\ \text{angle } B'A'C' = \alpha, \end{aligned}$$

et le point A' étant pris pour origine de trois axes rectangulaires, tels que $A'B'C'$ soit le plan des xy , et $A'B'$ l'axe

(*) La démonstration donnée page 278 est illusoire. On y reviendra.

des y ; désignons par x, y, z les coordonnées du point S.

Entre les six droites AB, AC, BC, MA, MB, MC qui joignent deux à deux les quatre points A, B, C, M, situés dans un même plan, Carnot (*Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*) a donné (page 7) une relation qui peut se mettre facilement sous la forme suivante :

$$(1) \begin{cases} (f^2 - h^2)[a^2(f^2 - g^2) + b^2(g^2 - h^2)] \\ - c^2(f^2 - g^2)(g^2 - h^2) - a^2(b^2 + c^2 - a^2)f^2 \\ - b^2(a^2 + c^2 - b^2)h^2 - c^2(a^2 + b^2 - c^2)g^2 + a^2b^2c^2 = 0. \end{cases}$$

Or, comme on a

$$\overline{SA'}^2 = f^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\overline{SB'}^2 = g^2 = x^2 + (y - m)^2 + z^2,$$

$$\overline{SC'}^2 = h^2 = (x - n \sin \alpha)^2 + (y - n \cos \alpha)^2 + z^2,$$

il s'ensuit que les différences $f^2 - g^2$, $f^2 - h^2$, $g^2 - h^2$ sont des fonctions du premier degré en x et y ; et par conséquent, la relation (1) donne une équation du second degré relativement à x, y, z ; donc, etc.

1^{re} remarque. Si l'on pose

$$A = 4mn \cos \alpha (a^2 - b^2 - c^2) + 4n^2 b^2 \cos^2 \alpha + 4m^2 c^2 + a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2),$$

$$B = 4n^2 b^2 \sin^2 \alpha + a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2),$$

$$C = a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2),$$

$$D = 4mn \sin \alpha (a^2 - b^2 - c^2) + 4n^2 b^2 \sin^2 \alpha,$$

$$E = -2m^2 n \cos \alpha (a^2 - b^2 - c^2) + 2nb^2 \cos \alpha (a^2 - b^2 + c^2) \\ - 4n^3 b^2 \cos \alpha - 2mn^2 (a^2 - b^2 - c^2) + 2mc^2 (a^2 + b^2 - c^2) \\ - 4m^3 c^2,$$

$$F = -2m^2 n \sin \alpha (a^2 - b^2 - c^2) + 2nb^2 \sin \alpha (a^2 - b^2 + c^2) \\ - 4n^3 b^2 \sin \alpha,$$

$$G = m^2 n^2 (a^2 - b^2 - c^2) - m^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2 - m^2) \\ - n^2 b^2 (a^2 - b^2 + c^2 - n^2) + a^2 b^2 c^2,$$

la surface du second degré, lieu du point S, est exprimée par l'équation

$$Ay^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dxy + Ey + Fx + G = 0.$$

2^e remarque. Si les deux triangles ABC, A'B'C' sont rectangles en A et A', c'est-à-dire si l'on a

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \alpha = 90^\circ,$$

l'équation (1) devient

$$\begin{aligned} 4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 + 4mc^2(b^2 - m)y \\ + 4nb^2(c^2 - n^2)x + m^2c^2(m^2 - b^2) \\ + n^2b^2(n^2 - c^2) + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0, \end{aligned}$$

et elle représente une surface du second degré, ayant pour centre le point milieu de l'hypoténuse B'C'. Si l'on rapporte alors la surface à son centre et à ses axes, son équation devient

$$\begin{aligned} 4c^2(m^2 - b^2)y^2 + 4b^2(n^2 - c^2)x^2 - 4b^2c^2z^2 \\ + b^2c^2(a^2 - m^2 - n^2) = 0, \end{aligned}$$

équation facile à discuter.

Note. MM. Vachette et Lamarle ont traité la question à peu près de la même manière.