Dieu

Concours d’agrégation, année 1844

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 293-299
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__293_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1844

(voir t. IV, p. 238 et 243);

PAR M. DIEU,
Agregé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Intégrer les équations

$$2\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} - 9y + 2x = 0$$

et

$$\frac{dy}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + y - 6x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

On élimine d'abord y, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ entre ces deux équations et celles qu'on obtient en les différentiant une fois, ce qui conduit à l'équation linéaire du troisième ordre,

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 10\frac{d^2x}{dt^2} + 29\frac{dx}{dt} - 26x = -\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(1) \qquad x = Te^{2t} + T_1 e^{\alpha t} + T_2 e^{\beta t},$$

α et β représentant, pour abréger, $4+\sqrt{3}$ et $4-\sqrt{3}$, qui sont avec 2 les racines de l'équation

$$X^3 - 10X^2 + 29X - 26 = 0,$$

et T, T_1, T_2 étant des fonctions de t déterminées par les équations

$$T = -\int e^{-2t}\,\varphi(t)\,dt, \qquad T_1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}\int e^{-\alpha t}.\varphi(t)\,dt,$$

$$T_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}\int e^{-\beta t}.\varphi(t)\,dt,$$

dans lesquelles $\varphi(t)$ tient lieu de $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - \frac{9}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

L'équation (1) est une des intégrales demandées; pour avoir l'autre, on chasse de la première des équations données x et $\frac{dx}{dt}$, ce qui donne

$$2\frac{dy}{dt} - 9y = (\alpha - 2)T_1 e^{\alpha t} + (\beta - 2)T_2 e^{\beta t},$$

dont l'intégrale est

$$2y = e^{\frac{9t}{2}}\left[(\alpha - 2)\int T_1 e^{\left(\alpha - \frac{9}{2}\right)t}.dt + (\beta - 2)\int T_2 e^{\left(\beta - \frac{9}{2}\right)t} dt\right].$$

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Déterminer les lois des petites oscillations d'un fil flexible, inextensible, et sans masse, suspendu à un point fixe, et chargé de deux points matériels pesants, en supposant que ces deux points n'aient pas de vitesse à l'origine du mouvement, et qu'ils se trouvent alors avec le point de suspension sur une droite très-peu écartée de la verticale.

Chercher les conditions qui doivent être remplies pour que chacun de ces points oscille comme un pendule simple.

I. Soient

m, m' les masses des deux points matériels:
l, l' les longueurs des deux parties du fil;
θ_0 l'angle initial d'écart:
M, M' les positions des deux points à la fin du temps t compté depuis l'origine du mouvement;
θ, θ' les angles que les deux parties du fil font alors avec la verticale (ces angles sont positifs du côté de θ_0, et négatifs du côté opposé).

D'après l'énoncé, les deux parties du fil resteront constamment tendues, soit quand elles seront sur le prolongement l'une de l'autre, soit quand elles formeront un angle, et les points matériels ne sortiront pas du plan de l'angle θ_0; donc m se mouvra toujours sur la circonférence de rayon l décrite du point de suspension comme centre, et, quand m sera en M, m' se mouvra pendant une durée infiniment petite sur la circonférence de rayon l' décrite de M comme centre.

On peut considérer m comme libre, pourvu qu'on lui applique à chaque instant deux forces dirigées suivant les deux parties du fil et égales à leurs tensions respectives. Or :

1°. La tension de l' est la somme $m'\left(g\cos\theta' + l'\frac{d\theta'^2}{dt^2}\right)$ de la composante du poids de m' suivant la direction de l', et de la force centrifuge due au mouvement de m' relatif à m, et la composante de cette tension suivant la tangente à l'arc décrit par m, s'obtient en la multipliant par $\sin(\theta - \theta')$, car l'angle que cette tangente fait avec la direction de l' est toujours représenté par $\frac{\pi}{2} + \theta' - \theta$.

2°. La composante de la tension de l suivant la même tangente est toujours nulle, et celle du poids de m est $mg\sin\theta$.

Donc, si l'on néglige les termes dont le degré surpasse deux en θ, θ', $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\theta'}{dt}$, qui sont continuellement des quantités très-petites, on a l'équation approchée

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\left[\frac{m'}{m}\theta' - \left(1 + \frac{m'}{m}\right)\theta\right].$$

Pour en former une seconde, il suffit de remarquer que le mouvement de m', relatif à m, est, à chaque instant, celui d'un pendule simple de longueur l', à point de suspension fixe, dont le point matériel pesant et de masse m' serait sollicité par une force accélératrice variable, toujours égale et contraire à celle de m. La composante de cette force, suivant la tangente à l'arc décrit par m', est $m'l\frac{d^2\theta}{dt^2}.\cos(\theta-\theta')$, car cette tangente fait, avec la tangente correspondante à l'arc décrit par m, un angle représenté par $\pm(\theta-\theta')$; celle du poids de m' suivant la même direction est $m'g\ \sin\theta'$, et celle de la tension de l' est nulle. Donc, on a

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = -\frac{1}{l'}\left(g\theta' + l\frac{d^2\theta}{dt^2}\right),$$

au degré d'approximation qui a été indiqué, et, en remplaçant $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ par la valeur que donne l'équation (1), il vient

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta'}{dt^2} = \frac{g}{l'}\left(1+\frac{m'}{m}\right)(\theta-\theta').$$

Afin d'intégrer simultanément les équations (1) et (2), on multiplie par un coefficient λ les deux membres de l'une d'elles, par exemple de la seconde, on ajoute ensuite membre à membre, puis, en posant

$$\theta + \lambda\theta' = u,$$

on chasse θ, ce qui donne

$$(3)\ \left\{\begin{array}{c} \dfrac{du}{dt^2} = g\left(1+\dfrac{m'}{m}\right) \\ \left\{\left(\dfrac{\lambda}{l'}-\dfrac{1}{l}\right)u - \dfrac{1}{l'}\left[\lambda^2+\left(1-\dfrac{l'}{l}\right)\lambda - \dfrac{m'l'}{l(m+m')}\right]\theta'\right\}. \end{array}\right.$$

Le coefficient de θ' dans cette équation est annulé par deux valeurs réelles de l'indéterminée λ, l'une positive et moindre que $\frac{l'}{l}$, l'autre négative, qui toutes deux rendent négatif le coefficient de u; en désignant par $-\lambda_1$ et λ_2 ces valeurs de λ, par $-k_1^2$ et $-k_2^2$ celles du coefficient de u $\left[\text{y compris le facteur positif } g\left(1+\frac{m'}{m}\right)\right]$, et par u_1 et u_2 celles de la fonction u respectivement correspondantes, on a, au lieu des équations (1) et (2), les équations, de même forme l'une que l'autre,

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2}+k_1^2 u_1=0, \qquad \frac{d^2 u_2}{dt^2}+k_2^2 u_2=0,$$

dont les intégrales, prises de manière qu'on ait $\theta=\theta'=\theta_0$, $\frac{d\theta}{dt}=0$ et $\frac{d\theta'}{dt}=0$, pour $t=0$, donnent les intégrales particulières des équations (1) et (2),

$$(4)\quad \theta-\lambda_1\theta'=\theta_0(1-\lambda_1)\cos k_1 t, \quad \theta+\lambda_2\theta'=\theta_0(1+\lambda_2)\cos k_2 t,$$

qui satisfont aux conditions initiales.

Ces deux intégrales donnent, à chaque instant, au degré d'approximation indiqué, les valeurs de θ et de θ' qui déterminent la position de m et celle de m'. On en déduit facilement celles de $-l\frac{d\theta}{dt}$, $-l'\frac{d\theta'}{dt}$, et par suite les vitesses absolues de m et de m', dont les composantes horizontales et verticales sont, pour m, $-l\frac{d\theta}{dt}$, $-l\theta\frac{d\theta}{dt}$, et pour m', $-l\frac{d\theta}{dt}-l'\frac{d\theta'}{dt}$, $-l\theta\frac{d\theta}{dt}-l\theta'\frac{d\theta'}{dt}$. Enfin, le point de suspension étant pris pour pôle, et la verticale de ce point pour axe polaire, on obtiendrait l'équation polaire de la trajectoire de m' par l'élimination de t, θ et θ', entre les équations (4), et

$$l(2-\theta^2)+l'(2-\theta'^2)-\rho(2-\varphi^2)=0,$$
$$l(\theta'-\theta)-\rho(\theta'-\varphi)=0,$$

que l'on trouve facilement (φ et ρ sont les coordonnées de M').

II. Chacun des points m et m' oscillera comme un pendule simple, si les équations (4) donnent les mêmes valeurs de θ et de θ', pour des valeurs de t en progression par différence de raison quelconque α, et commençant à une valeur quelconque de t. Or, cela exige évidemment que l'on ait

$$(5) \qquad \cos k_1 t = \cos k_1 (t + \alpha), \quad \text{et} \quad \cos k_2 t = \cos k_2 (t + \alpha)$$

pour toute valeur de t, et, par conséquent,

$$k_1 \alpha = 2 n_1 \pi, \quad \text{et} \quad k_2 \alpha = 2 n_2 \pi,$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers positifs, qu'on peut supposer premiers entre eux. Quand il en est ainsi, le rapport $\frac{k_1}{k_2}$ est commensurable; et, réciproquement, si

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

n_1 et n_2 étant deux nombres entiers, les équations (5) sont vérifiées par les valeurs

$$t = t', \quad t' + \alpha, \quad t' + 2\alpha, \text{ etc.}, \ldots,$$

quel que soit le temps t', en prenant $\alpha = \frac{2 n_1 \pi}{k_1} = \frac{2 n_2 \pi}{k_2}$. Donc, il n'y a qu'une condition nécessaire et suffisante pour que chacun des points matériels oscille comme un pendule simple, savoir : *que le rapport des quantités k_1 et k_2 soit commensurable.*

On peut démontrer que si l'un des deux points oscille comme un pendule simple, il en sera de même de l'autre point.

Rectification à la solution du problème de Mécanique du concours d'agrégation, année 1851; par M. Dieu. (Tome XI, page 84.)

A la page 90, *au lieu des* lignes de 4 à 7 en descendant, *il faut :*

Dans ce cas, le point D atteint en descendant la position déterminee par cette valeur de y; puis il remonte ensuite, et il faut considerer le signe — dans le second membre de l'équation (4).

Et à la même page, *au lieu des* quatre dernières lignes, *il faut :*

D, en remontant, finit par atteindre la position déterminée par la valeur $[\alpha]$ de y; puis il redescend, et l'on doit alors considérer le signe + dans le second membre de l'équation (4).

Dans ce cas, comme dans le précedent, le mouvement est oscillatoire, du moins après la première excursion.