NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LAGUERRE-WERLY

Note sur la théorie des foyers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 290-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__290_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES FOYERS;

PAR M. E. LAGUERRE-WERLY, DE BAR-LE-DUC,
Élève de l'institution Barbet.

1. Soit une conique ayant pour foyer le point $[\alpha, \beta]$, son équation sera de la forme

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = X^2,$$

X étant une fonction linéaire de x et de y, ou bien encore

$$\left\{(x-\alpha)+\sqrt{-1}\,(y-\beta)\right\}\left\{(x-\alpha)-\sqrt{-1}\,(y-\beta)\right\} = X^2.$$

Sous cette dernière forme, on voit que cette conique est tangente aux deux droites

$$(x-\alpha)+\sqrt{-1}\,(y-\beta) = 0,$$

et

$$(x-\alpha)-\sqrt{-1}\,(y-\beta) = 0.$$

Réciproquement, si une conique est tangente à ces deux droites, elle a pour foyer le point $[\alpha, \beta]$. Cette propriété analytique peut être employée pour trouver les coordon-

(*) M. Symon (Alexis), élève à Bruxelles, trouve le lieu pour l'angle S droit et discute le cas où le triangle ABC fait une demi-révolution autour de la base AB.

nées des quatre foyers d'une conique donnée par son équation.

Il suit de là que les coniques confocales doivent être regardées comme tangentes à deux mêmes droites, les coniques bi-confocales comme inscrites dans un même quadrilatère dont les quatre sommets sont les quatre foyers communs. Ces propriétés *projectives* des foyers nous permettront de généraliser leurs propriétés *métriques*.

2. Ainsi, de la théorie des coniques bi-confocales, nous pourrons tirer tous les théorèmes relatifs aux coniques inscrites dans un même quadrilatère.

Considérons, par exemple, trois coniques bi-confocales; par un point extérieur, menons-leur des tangentes : ces trois couples de tangentes auront une bissectrice commune; donc ils formeront un faisceau en involution. En généralisant, nous retrouverons le théorème de Desargues.

3. Deux coniques bi-confocales se coupent orthogonalement. L'homographie généralise ainsi ce théorème :

Si deux coniques inscrites dans un même quadrilatère se coupent, les deux tangentes menées au point d'intersection, et les droites obtenues en joignant ce point à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit, forment un faisceau harmonique.

4. La considération des foyers imaginaires peut être souvent utile; je ne citerai qu'un exemple.

Considérons une conique et deux tangentes à cette conique; joignons le point d'intersection des deux tangentes aux quatre foyers; les trois couples de droites ainsi obtenues auront une bissectrice commune, donc ils formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous trouverons ce théorème, cas particulier de celui de Desargues :

Si une conique est inscrite dans un quadrilatère, que *par un point extérieur on mène deux tangentes à cette conique, et puis, qu'on joigne ce point aux quatre sommets du quadrilatère, on obtiendra un faisceau en involution* (*).

5. Je citerai encore quelques théorèmes, conséquences immédiates des principes précédents.

1°. Le lieu des centres des coniques tangentes à deux droites données et ayant un foyer fixe est une droite (**).

2°. Une conique inscrite dans un angle étant donnée. le problème suivant : « Construire une conique tangente à la première et aux deux côtés de l'angle en deux points donnés, » est, en général, susceptible de deux solutions. Les deux points de contact cherchés et le sommet de l'angle sont en ligne droite.

3°. Considérons trois coniques confocales, et, par un point pris dans le plan de ces coniques, menons six tangentes. Joignons les six points de contact au foyer commun, nous obtiendrons ainsi trois couples de droites ayant une bissectrice commune ; donc elles formeront un faisceau en involution.

En généralisant, nous aurons le théorème suivant :

Théorème. *Si trois coniques sont tangentes à deux mêmes droites se coupant en* P, *et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes ; en joignant les six points de contact au point* P, *on aura un faisceau en involution.*

Note. M. Laguerre est parvenu a donner une plus grande généralité encore à ce beau théorème et toujours par la methode analytique et projective combinée, si courte, si féconde. Nous donnerons ce travail prochainement.

(*) Le theorème sur le quadrilatère qu'on lit dans la *Géométrie supérieure*, p. 249, combiné avec celui-ci, donne lieu à un troisième théorème. Tm.

(**) *Voir* t. II, p. 108 ; prenant le foyer pour origine, on a $n = 0$; $l = l'$; donc, etc.