

MÖBIUS

**Démonstration géométrique du  
parallélogramme des forces et théorème  
sur des forces concourantes**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 11  
(1852), p. 281-286

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1852\\_1\\_11\\_\\_281\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__281_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---



---

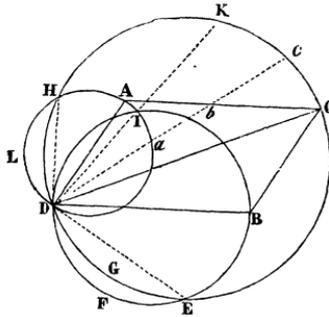
**DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU PARALLÉLOGRAMME DES FORCES ET THÉORÈME SUR DES FORCES CONCURRENTES;**

D'APRÈS M. MÖBIUS.

---

1. *Lemme.* Étant donné un système de cercles, dans le même plan et passant par le même point; si par ce point on mène deux sécantes, elles interceptent sur les cercles des arcs semblables.

2. *Lemme.* Mêmes données; si l'on mène par le point commun une sécante, et que par tous les points où cette sécante rencontre les cercles, on prenne respectivement sur chaque cercle et du même côté des arcs semblables, les extrémités de ces arcs ainsi obtenues sont sur une droite passant par le point d'intersection commun.



3. *Lemme.* Soit le parallélogramme ADBC: sur les côtés DA, DB et sur la diagonale DC, comme diamètre, on décrit trois circonférences; désignons ces trois circonférences par les lettres A, B, C: menant par le point D

une sécante qui coupe la circonférence

A en  $a$ ,

B en  $b$ ,

C en  $c$ ,

on a : 1°.  $Dc = Da + Db$ .

2°. Le côté AC passe par l'intersection H des cercles A et C,  

BC	E	B et C,
la diagonale AB	I	A et B.

3°. La corde DE sous-tend dans le cercle B un arc DFE qui mesure le double de l'angle  $DBE = 2 \cdot ADB$ , et la même corde DE sous-tend dans le cercle C un arc DGE qui mesure le double de l'angle  $DCE = 2 \cdot ADE$ .

4. THÉOREME *Si dans le parallélogramme ADBC, les côtés DA, DB représentent en grandeur et en direction deux forces appliquées en D, la diagonale DC représente en grandeur et en direction la résultante de deux forces représentées par les côtés.*

*Démonstration.* Mêmes données et mêmes constructions que dans le lemme 3. Deux cas sont à distinguer :

1<sup>er</sup> cas. Le rapport de chacun des angles ADC, CDB à l'angle droit est *rationnel*. Supposons donc la circonférence divisée en  $m$  parties égales, et que ADC, CDB renferment respectivement  $p$  et  $q$  de ces parties, de sorte que l'angle ADB renferme  $p + q$  de ces parties; concevons maintenant qu'on partage chacune des trois circonférences A, D, B en  $m$  parties égales, et que le point D soit un point de division dans chacune. L'arc DFE, qui mesure l'angle  $2 \cdot ADB$  (lemme 3) renferme donc  $2(p + q)$  de ces divisions, et le point E est un point de division dans le cercle B; par la même raison, il est un point de division dans le cercle C, car l'arc DGE, mesurant le double de l'angle ADC, renferme  $2p$  de ces parties. D étant un point de division dans le cercle A, il s'ensuit

que la sécante DE contient un point de division de chacune des trois circonférences. Donc, en vertu du lemme 2, le  $x^{\text{ième}}$  point de division du cercle A, le  $(x + 2p)^{\text{ième}}$  du cercle C, le  $(x + 2p + 2q)^{\text{ième}}$  dans le cercle B, sont en ligne droite avec le point D, et la portion de cette droite interceptée par le cercle C est égale à la somme des cordes interceptées par les cercles A et B (lemme 3). Cela posé, menons du point D des droites aux  $m - 1$  autres points de division du cercle A, et supposons que toutes ces cordes représentent en grandeur et en direction des forces appliquées en D. Faisons de même dans le cercle B et le cercle C;  $a, b, c$  étant des points de division en ligne droite avec D, la force Dc est la résultante des forces Da et Db (lemme 3). Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les résultantes respectives des forces agissant dans les cercles A, B, C; il est évident que  $\gamma$  est la résultante des deux forces  $\alpha$  et  $\beta$ . Or, le diamètre DA, axe de symétrie par rapport aux points de division du cercle A, représente en direction la force  $a$ ; par une raison analogue, les diamètres DC, DB sont les directions des forces  $\gamma$  et  $\beta$ ; mais les cercles, avec les systèmes de cordes, sont des figures semblables; donc les forces  $\alpha, \beta, \gamma$  sont proportionnelles aux diamètres DA, DB, DC: de là les forces représentées en grandeur et en direction par DA et DB ont pour résultante une force représentée en grandeur et en direction par la force DC. C. Q. F. D.

2<sup>e</sup> cas. Le rapport des angles ADC, CDB à l'angle droit est *irrationnel*. On démontre ce second cas à l'aide du premier, par les méthodes connues.

4. THÉORÈME. Soit un système de forces dans l'espace, agissant sur un point et représentées par des longueurs données, ainsi que leur résultante. Si l'on décrit des sphères sur toutes ces longueurs comme diamètres, et que l'on mène par le point de concours des forces une sécante quelconque, la portion de cette sécante in-

*interceptée par la sphère décrite sur la résultante, est égale à la somme algébrique des portions interceptées par les autres sphères.*

Cette ingénieuse démonstration et ce beau théorème, qui établissent une nouvelle connexion entre la mécanique et la géométrie, sont dans l'ouvrage allemand intitulé : *Lehrbuch der Statik*, publié en 1837 à Leipsig, en deux vol. in-8, par M. Auguste-Ferdinand Mobius, professeur d'astronomie à Leipzig. C'est un Traité complet de statique, déduite par une logique sévère, d'un seul principe. Le célèbre professeur, prenant pour point de départ *le couple*, en fait découler toutes les propositions de l'équilibre des forces dirigées d'une manière quelconque. *Le couple!* magnifique création française, admirable de simplicité, de lucidité, de fécondité, et toutefois on prétend le proscrire au bénéfice de la nuageuse conception des *forces vives*, sous le nom commercial de *quantités de travail*. Dans cet ouvrage, on ne parle nullement des machines; excellente omission. La théorie des machines doit trouver sa place dans la dynamique, et pas dans la statique, qui ne peut en donner que des notions insuffisantes, sujettes à de graves erreurs qu'Euler a signalées depuis longtemps; mais à cause de cela, vouloir supprimer la statique est une entreprise folle et anti-pédagogique. De même que l'arithmétique n'existe pas uniquement pour des opérations de banque, ou la géométrie pour des levés de terrains, de même la mécanique n'est pas renfermée dans les ateliers et les usines. Que des hommes devant leur existence, leur réputation aux ateliers et aux usines, veuillent nous faire croire que les engins et les machines sont seuls dignes de nos considérations, je le conçois très-bien; mais que ces intérêts individuels doivent servir de régulateur à l'enseignement général, c'est ce qu'on ne me fera jamais comprendre. Tout ceci me fait penser à la

Chine. Dans ce céleste empire, la recherche du *beau*, du *vrai*, en un mot la recherche de l'*utilité morale* n'est pas le but; mais la recherche de l'*utilité matérielle*, corporelle, immédiate, tel est l'unique but. Voici comment s'exprime à ce sujet un des hommes les plus savants, les plus judicieux de France, célèbre chimiste, excellent écrivain :

« Une nation remarquable par son antiquité, sa population et l'habileté qu'elle a montrée dans la pratique des arts utiles, est le peuple chinois. Ce qu'il a voulu autrefois, il le veut encore aujourd'hui : c'est l'*application*, c'est l'*utilité immédiate des choses*. Mais ni les arts chimiques ni les arts mécaniques ne peuvent atteindre à la perfection où ils sont parvenus dans l'Europe occidentale, sans l'étude des sciences mathématiques, physiques et chimiques cultivées au point de vue de la plus grande *abstraction* possible, parce que cette étude donne seuls les moyens d'assujettir les procédés des arts aux préceptes et aux règles qui en assurent l'exécution, en même temps qu'elle seule préside à la confection de toute machine et de tout instrument de précision, sans lesquels les progrès des sciences du monde extérieur sont impossibles. C'est donc parce que cette étude a manqué à la Chine, que le développement de l'industrie y a été borné aux progrès que chaque art a dus aux uniques efforts des ouvriers qui l'ont pratiqué.

» Si nous considérons maintenant que les fonctions de l'administration de ce pays sont exclusivement dévolues aux *lettrés*, et que ce titre, loin d'être un privilège aristocratique, appartient à tout individu, quelle que soit son origine, qui fait preuve publique d'un *savoir suffisant* pour être jugé digne de l'obtenir, on voit qu'il n'y a plus de motifs pour que cet individu porte son attention, sa pensée sur des objets dont l'étude ne le conduirait à

rien ou ne lui donnerait pas les avantages qu'il est sûr d'obtenir en s'engageant dans une voie connue, qui, toujours ouverte au savoir, a dû être l'objet constant de son ambition. Les lettrés, appliquant leurs facultés intellectuelles à l'administration, ne sont plus tentés de se livrer à des spéculations philosophiques qui, pour eux, seraient absolument stériles, parce qu'elles manqueraient d'*utilité immédiate*. Les deux causes qui, jusqu'ici, se sont incessamment opposées aux progrès des arts et des sciences à la Chine, expliquent parfaitement le fait, si étonnant au premier abord, que les Chinois, après avoir eu connaissance de la poudre à canon, du papier, de l'imprimerie et de l'aiguille aimantée, longtemps avant les Européens, ont été bien loin pourtant d'en tirer le même parti que ces derniers, soit que l'on ait égard aux perfectionnements apportés à ces découvertes, soit qu'on ait égard à l'influence exercée par elles sur l'état de la société dans les deux populations. » (*Journal des Savants*, 1845, p. 331-332.)

Il y a sept ans que l'illustre M. Chevreul parlait ainsi du système scolaire chinois, et prophétiquement d'un autre système que je n'ai pas besoin de nommer. Qui est l'auteur de ce système impie? l'orgueil. On ne se rappelle jamais ce que disait, il y a dix-huit cents ans, une puissante intelligence maniée par un divin caractère : « *Εἰ γὰρ δοκεῖ τις εἶναι τι, μηδὲν ἐόν, ἑαυτὸν φρενιπαταῖ;* » *car si quelqu'un s'estime être quelque chose, il se trompe lui-même, parce qu'il n'est rien.* » (SAINT PAUL aux Galates, ch. VI, 3.)