NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DIENGER

Du tracé géographique des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 252-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__252_1>

DU TRACÉ GÉOGRAPHIQUE

Des surfaces courbes les unes sur les autres, et application de ce tracé à la construction des cartes géographiques;

PAR M. LE Dr J. DIENGER,

Professeur à l'Ecole Polytechnique de Carlsruhe

C'est M. Gauss qui, le premier, a résolu le problème important de faire correspondre les points d'une surface courbe à ceux d'une autre surface courbe, de telle sorte que les éléments de ces surfaces passant par des points correspondants soient semblables. M. Liouville a ajouté des éclaircissements aux développements de M. Gauss (*), et je crois rendre quelque service aux lecteurs de ces *Annales*, en exposant les principes sur lesquels repose la solution de ce problème, en suivant la route que ces grands maîtres ont tracée. J'ajouterai quelques indications rapides de l'application de ces principes au tracé des cartes géographiques.

I.

Supposons qu'on ait deux surfaces S et Σ, et qu'on veuille faire correspondre les points de la surface S aux points de la surface Σ, de telle sorte qu'en connaissant

---

(*) *Application de l'Analyse, etc.*, page 601.

les coordonnées d'un point $\mathfrak{M}$ de la surface S, on puisse déterminer les coordonnées du point M de la surface Σ, qui correspond au point $\mathfrak{M}$. Nous supposerons, en outre, que la loi de cette correspondance soit telle, qu'à des points différents de la surface S correspondent des points différents de la surface Σ, et qu'à deux points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ infiniment voisins de S, correspondent deux points aussi infiniment voisins M et M' de Σ. Il est aisé de voir que ces conditions seront remplies aussitôt que la loi qui régit cette correspondance est exprimée par une fonction continue.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de déterminer cette loi de correspondance, sous la condition que les éléments infiniment petits des deux surfaces S et Σ passant par les points correspondants $\mathfrak{M}$ et M soient semblables, c'est-à-dire qu'en se figurant ces éléments de forme triangulaire, que ces triangles soient semblables. On pourra donc exprimer ce problème aussi de cette manière : Soient $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ trois points infiniment voisins de la surface S (non situés en ligne droite), et M, M', M'' les points correspondants de l'autre surface, les triangles $\mathfrak{M}\,\mathfrak{M}'\,\mathfrak{M}''$, M M' M'' doivent être semblables.

Pour résoudre ce problème dans toute sa généralité, nous ferons d'abord les observations suivantes : Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point $\mathfrak{M}$ par rapport à un système d'axes rectangulaires quelconques, et soit $\mathfrak{N}$ un point infiniment voisin sur la même surface; l'élément linéaire ds sera exprimé par $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, $x+dx, y+dy, z+dz$ étant les coordonnées du point $\mathfrak{N}$, et $dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, et l'on tirera les valeurs des quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ de l'équation donnée de la surface. Les coordonnées x, y sont deux variables indépendantes.

Imaginons maintenant qu'au lieu de ces deux variables indépendantes x, y, on en introduise deux autres p, q, liées par des équations connues aux quantités x, y, de telle sorte qu'on pourra exprimer x, y par p, q ; on aura évidemment

$$dx = \frac{dx}{dp}dp + \frac{dx}{dq}dq, \quad dy = \frac{dy}{dp}dp + \frac{dy}{dq}dq.$$

Mais comme z est une fonction de x et y, z sera aussi une fonction de p et q, et l'on aura donc aussi

$$dz = \frac{dz}{dp}dp + \frac{dz}{dq}dq.$$

Soient donc p, q les valeurs de ces nouvelles variables indépendantes qui fixent la position du point $\mathfrak{M}$, $p + dp$, $q + dq$ leurs valeurs pour le point $\mathfrak{N}$; l'élément linéaire $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ sera exprimé par

$$(1)\ \left\{\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}dp + \frac{dx}{dq}dq\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}dp + \frac{dy}{dq}dq\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}dp + \frac{dz}{dq}dq\right)^2} \\ &= \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dpdq + G\,dq^2}, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger.

$$(2)\ \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = E, \\ &\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = F, \\ &\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2 = G. \end{aligned}\right.$$

L'expression (1) sera donc l'expression générale d'un élément linéaire sur une surface courbe. Les quantités dp, dq étant absolument indépendantes l'une de l'autre, cette expression pourra désigner un élément linéaire quelconque passant sur la surface courbe par le point $\mathfrak{M}$; mais aussitôt qu'on suppose une relation entre ces quantités, cet élément appartiendra à une ligne courbe déterminée sur la surface.

II.

Soient, comme au § I, $\mathfrak{M}$ un point de la surface S, M le point correspondant de la surface Σ; x, y, z les coordonnées du point $\mathfrak{M}$; x', y', z' celles du point M rapportées aux mêmes axes ou à d'autres axes rectangulaires. Par suite de la loi qui régit la correspondance de ces deux points, les quantités x', y', z' seront fonctions des quantités x, y, z, c'est-à-dire fonctions des variables indépendantes x, y. Ayant introduit les variables indépendantes p, q (qui pourraient très-bien être les quantités x, y elles-mêmes), on verra facilement que x', y', z' seront fonctions de p, q aussi bien que x, y, z. Les valeurs p, q de ces variables indépendantes fixeront donc sur les deux surfaces les points correspondants $\mathfrak{M}$, M, et en passant de ces valeurs aux valeurs $p+dp$, $q+dq$, on passera de ces points à deux points infiniment voisins $\mathfrak{N}$ et N. Les éléments linéaires $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ et MN seront dits *éléments correspondants*, en désignant par là deux éléments passant par des points correspondants. Les quantités infiniment petites dp, dq restant absolument indépendantes l'une de l'autre, les points $\mathfrak{N}$ et N peuvent être des points quelconques infiniment voisins de $\mathfrak{M}$ et M.

Soient maintenant ds l'élément $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$, $d\mathrm{S}$ l'élément MN, et soit

$$\frac{d\mathrm{S}}{ds} = m, \tag{3}$$

et supposons que cette équation ait lieu sans aucune relation entre dp et dq; elle exprimera donc que deux éléments linéaires correspondants passant par les points correspondants $\mathfrak{M}$, M ont toujours le même rapport entre eux, quelle que soit leur direction. Or, en désignant par E′, F′, G′ des quantités absolument semblables aux quantités E, F, G, et qu'on obtient par les équations (2), en substituant à x, y, z les quantités x', y', z', on aura

$$dS = \sqrt{E' dp^2 + 2F' dp\,dq + G' dq^2},$$

et l'équation (3) donnera

$$E' dp^2 + 2F' dp\,dq + G' dq^2 = m^2 [E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2].$$

Pour que cette équation puisse subsister indépendamment d'aucune relation entre dp et dq, il faut qu'on ait

$$(4) \qquad E' = m^2 E, \quad F' = m^2 F, \quad G' = m^2 G.$$

Les équations (4) expriment donc la relation qui doit exister entre les quantités E, F, G, E′, F′, G′, c'est-à-dire entre x, y, z, x', y', z', pour que deux éléments correspondants quelconques passant par deux points correspondants aient entre eux le même rapport, quelle que soit leur direction.

Or je dis que ces mêmes équations (4) expriment aussi les conditions pour que deux couples d'éléments linéaires correspondants, $\mathcal{M}\mathcal{N}$, $\mathcal{M}\mathcal{N}'$ et MN, MN′, passant par les points correspondants $\mathcal{M}$ et M, fassent entre eux le même angle.

Car, soient p, q les valeurs des variables indépendantes qui fixent la position des points $\mathcal{M}$ et M; $p + dp$, $q + dq$ ces valeurs pour les points $\mathcal{N}$ et N; $p + dp'$, $q + dq'$ pour $\mathcal{N}'$ et N′; on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\mathcal{N} &= \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2}, \\
\mathcal{M}\mathcal{N}' &= \sqrt{E\,dp'^2 + 2F\,dp'dq' + G\,dq'^2}; \\
MN &= \sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G\,dq^2}, \\
MN' &= \sqrt{E'\,dp'^2 + 2F'\,dp'dq' + G'\,dq'^2}.
\end{aligned}$$

Soient α l'angle des deux éléments $\mathcal{M}\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}\mathcal{N}'$, α' celui des éléments MN et MN′; on a, en désignant les coordonnées rectangulaires de N par $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, et celles de N′ par $x+dx'$, $y+dy'$, $z+dz'$,

$$\cos\alpha = \frac{dx.dx'+dy.dy'+dz.dz'}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}.\mathfrak{M}\mathfrak{N}'}$$

$$= \frac{\left(\frac{dx}{dp}dp+\frac{dx}{dq}dq\right)\left(\frac{dx}{dp}dp'+\frac{dx}{dq}dq'\right)+\left(\frac{dy}{dp}dp+\frac{dy}{dq}dq\right)\left(\frac{dy}{dp}dp'+\frac{dy}{dq}dq'\right)+\left(\frac{dz}{dp}dp+\frac{dz}{dq}dq\right)\left(\frac{dz}{dp}dp'+\frac{dz}{dq}dq'\right)}{\mathfrak{M}\mathfrak{N}.\mathfrak{M}\mathfrak{N}'}$$

$$= \frac{\mathrm{E}\,dp\,dp'+\mathrm{F}\,(dp\,dq'+dp'\,dq)+\mathrm{G}\,dq\,dq'}{\sqrt{\mathrm{E}\,dp^2+2\mathrm{F}\,dp\,dq+\mathrm{G}\,dq^2}.\sqrt{\mathrm{E}\,dp'^2+2\mathrm{F}\,dp'\,dq'+\mathrm{G}\,dq'^2}}.$$

De même, on aura

$$\cos\alpha' = \frac{\mathrm{E}'\,dp\,dp'+\mathrm{F}'\,(dp\,dq'+dp'\,dq)+\mathrm{G}'\,dq\,dq'}{\sqrt{\mathrm{E}'\,dp^2+2\mathrm{F}'\,dp\,dq+\mathrm{G}'\,dq^2}.\sqrt{\mathrm{E}'\,dp'^2+2\mathrm{F}\,dp'\,dq'+\mathrm{G}'\,dq'^2}}.$$

Or, par suite des équations (4), ces quantités sont identiques; donc on aura

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \alpha = \alpha',$$

vu qu'on pourra toujours supposer les angles α, α' comptés, de sorte qu'on aura $\alpha = \alpha'$, et non $\alpha' = 360 - \alpha$.

Il suit de ces développements que, quelles que soient les coordonnées indépendantes p, q, les équations (4), qui résultent de la supposition que les éléments linéaires correspondants, groupés autour des points correspondants, ont tous le même rapport entre eux, expriment en même temps les conditions pour que ces éléments correspondants fassent entre eux les mêmes angles.

Enfin, nous tirons de là cette conséquence, que les éléments triangulaires $\mathfrak{N}\mathfrak{M}\mathfrak{N}'$, NMN′ sont semblables, parce qu'on a

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N} : \mathfrak{M}\mathfrak{N}' = \mathrm{MN} : \mathrm{MN}',$$
$$\alpha = \alpha',$$

c'est-à-dire que les éléments des deux surfaces passant par trois points infiniment voisins et ayant une forme triangulaire, sont semblables, ce que que nous avons supposé devoir être au § I.

En substituant à p, q d'autres variables indépendantes, la même conclusion aura toujours lieu, pourvu qu'on ait $\frac{d\mathrm{S}}{ds} = m$, indépendamment d'aucune relation entre ces variables indépendantes.

III.

Je dis maintenant qu'on pourra toujours trouver des variables indépendantes φ et ψ, de telle sorte que $ds = \sqrt{h(d\varphi^2 + d\psi^2)}$. Si l'on avait $\mathrm{F} = 0$, $\mathrm{E} = \mathrm{G}$, les coordonnées p, q rempliraient déjà cette condition, et elles seraient alors les coordonnées cherchées φ, ψ. Mais, en général, ce cas n'aura pas lieu, et l'on trouvera les quantités φ, ψ de la manière suivante. Nous avons vu, § II, qu'on a $ds^2 = \mathrm{E}dp^2 + 2\mathrm{F}\,dp\,dq + \mathrm{G}dq^2$; or il est facile de voir qu'on a, en désignant par i la quantité $\sqrt{-1}$,

$$\mathrm{E}dp^2 + 2\mathrm{F}dp\,dq + \mathrm{G}dq^2$$
$$= \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{E}dp + \mathrm{F}dq + i\,dq\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\right)\left(\mathrm{E}dp + \mathrm{F}dq - i\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\right).$$

La quantité $\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2$ est toujours positive, car on trouve

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)^2,$$

quantité évidemment positive. Supposons maintenant qu'on ait l'équation différentielle

$$(5)\qquad E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2} = 0\,;$$

il y aura toujours un facteur ν, de telle sorte qu'en multipliant le premier membre de cette équation par ce facteur, ce membre soit une différentielle exacte (Moigno, *Leçons sur le Calcul intégral*, leçon XXIII); donc on aura

$$\nu\left(E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2}\right) = d\varphi + i\,d\psi,$$

φ et ψ étant des quantités dépendant de p et q, qu'on saura toujours déterminer au moyen de l'équation (5). Donc on a

$$E\,dp + F\,dq + i\,dq\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{\nu}(d\varphi + i\,d\psi),$$

et, de même,

$$E\,dp + F\,dq - i\,dq\sqrt{EG - F^2} = \frac{1}{\nu'}(d\varphi + i\,d\psi),$$

où ν' sera égale à ν, si cette dernière quantité ne contient point de i. Donc on a

$$(6)\qquad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{E}\cdot\dfrac{1}{\nu}(d\varphi + i\,d\psi)\cdot\dfrac{1}{\nu'}(d\varphi - i\,d\psi) \\ \quad = \dfrac{1}{E\nu\nu'}(d\varphi^2 + d\psi^2) = h(d\varphi^2 + d\psi^2), \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{E\nu\nu'},$$

ce qui démontre qu'on peut donner à ds la forme désignée ci-dessus. On pourra, de même, supposer

$$dS^2 = H(d\Phi^2 + d\Psi^2),$$

Φ et Ψ étant des quantités trouvées par l'intégration de l'équation

$$E'dp + F'dq + i\,dq\sqrt{E'G' - F'^2} = 0,$$

ou d'une autre manière quelconque. Prenons maintenant les variables φ, ψ pour variables indépendantes; les variables Φ, Ψ devront en dépendre en tant que les points des deux surfaces correspondent les uns aux autres, et en supposant que la relation $dS^2 = m^2 ds^2$ ait lieu indépendamment d'aucune relation entre $d\varphi$ et $d\psi$, les théorèmes du § II auront toujours lieu. Or cette relation nous donnera l'expression de Φ et Ψ en φ et ψ, de cette manière.

L'équation $dS^2 = m^2 ds^2$ est

$$\mathrm{H}[(d\Phi)^2 + (d\Psi)^2] = m^2 h[(d\varphi)^2 + (d\psi)^2];$$

c'est-à-dire, en posant

$$\frac{m^2 h}{\mathrm{H}} = k, \quad d\Phi = \frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} d\psi, \quad d\Psi = \frac{d\Psi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Psi}{d\psi} d\psi,$$

$$\left(\frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} d\psi\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\varphi} d\varphi + \frac{d\Psi}{d\psi} d\psi\right)^2 = k(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

d'où il résulte

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2 = k, \\ \frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\psi} + \frac{d\Psi}{d\varphi}\frac{d\Psi}{d\psi} = 0. \end{array} \right.$$

La dernière de ces équations donne

$$\frac{\frac{d\Phi}{d\varphi}}{\frac{d\Psi}{d\varphi}} = -\frac{\frac{d\Psi}{d\psi}}{\frac{d\Phi}{d\psi}},$$

et en posant, pour abréger, une de ces fractions égale à α,

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \alpha \frac{d\Psi}{d\varphi}, \quad \frac{d\Phi}{d\psi} = -\frac{1}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\psi}.$$

Substituant ces valeurs dans la première équation (7), on trouve

$$\alpha^2\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\Psi}{d\varphi}\right)^2=\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\Psi}{d\psi}\right)^2,$$

$$\frac{d\Psi}{d\varphi}=\pm\frac{1}{\alpha}\frac{d\Psi}{d\psi},\quad \frac{d\Psi}{d\psi}=\pm\alpha\frac{d\Psi}{d\varphi}=\pm\frac{d\Phi}{d\varphi};$$

et, en remettant cette valeur dans la dernière des équations (7),

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\psi}\pm\frac{d\Psi}{d\varphi}\frac{d\Phi}{d\varphi}=0,\quad \frac{d\Phi}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi}.$$

Donc on a

$$\frac{d\Psi}{d\psi}=\pm\frac{d\Phi}{d\varphi},\quad \frac{d\Phi}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi},$$

puis

$$\frac{d(\Phi+i\Psi)}{d\psi}=\mp\frac{d\Psi}{d\varphi}\pm i\frac{d\Phi}{d\varphi}=\pm i\frac{d(\Phi+i\Psi)}{d\varphi}.$$

Posant, pour abréger, $\Phi+i\Psi=z$, on a

$$\frac{dz}{d\psi}=\pm i\frac{dz}{d\varphi},$$

équation aux différentielles partielles dont l'intégrale générale est

$$(8)\qquad \Phi+i\Psi=f(\varphi\mp i\psi),$$

f étant une fonction arbitraire. Quant au double signe $\mp$, on peut se servir de l'un ou de l'autre. La fonction arbitraire f étant déterminée, l'équation (8) donnera les valeurs de Φ et Ψ en φ et ψ, en égalant dans les deux membres les quantités réelles et imaginaires.

On tire de l'équation (8),

$$d\Phi+id\Psi=f'(\varphi\mp i\psi)(d\varphi\mp id\psi),$$
$$d\Phi+id\Psi=f'(\varphi\pm i\psi)(d\varphi\pm id\psi),$$

et de là

$$d\Phi^2 + d\Psi^2 = f'(\varphi \mp i\psi) f'(\varphi \pm i\psi)(d\varphi^2 + d\psi^2),$$

$$\frac{d\Phi^2 + d\Psi^2}{d\varphi^2 + d\psi^2} = \frac{dS^2}{ds^2} \cdot \frac{h}{H} = m^2 \frac{h}{H} = f'(\varphi + i\psi) f'(\varphi - i\psi),$$

d'où

$$(9) \qquad m = \sqrt{\frac{H}{h} f'(\varphi + i\varphi) f'(\varphi - i\psi)},$$

où m exprime le rapport de deux éléments linéaires passant par des points correspondants fixés par les valeurs φ et ψ des variables indépendantes.

Ce qu'on vient de voir revient donc à ceci :

Supposons qu'on ait introduit deux variables indépendantes (coordonnées) servant à déterminer la position d'un point quelconque sur une surface donnée, de telle sorte que chaque élément d'une ligne courbe sur cette surface soit exprimé par la formule $\sqrt{h(d\varphi^2 + d\psi^2)}$, ce que nous avons démontré être toujours possible; l'équation (8) servira à déterminer les coordonnées indépendantes Φ et Ψ d'une seconde surface en fonction de φ et ψ, de telle manière qu'à chaque point de la première surface correspond un point de la seconde, et que les éléments triangulaires des deux surfaces passant par trois points correspondants infiniment voisins soient semblables, les quantités Φ et Ψ devant jouir de la même propriété, qu'un élément linéaire de la seconde surface puisse être exprimé par $\sqrt{H(d\Phi^2 + d\Psi^2)}$.

Une des applications les plus importantes de cette théorie est l'application aux calculs de la haute géodésie; mais nous n'en parlerons pas ici, et nous n'indiquerons que rapidement l'application au tracé des cartes géographiques.

IV.

Supposons que l'une des deux surfaces dont il a été question dans ce qui précède soit un ellipsoïde de révolution, et l'autre un plan. Supposons, en outre, que l'ellipsoïde ait été engendré par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe $2b$, et soit $2a$ son grand axe. Supposons enfin les points de cet ellipsoïde rapportés à trois axes rectangulaires, dont l'origine soit au centre de l'ellipsoïde et dont l'axe des z soit celui de rotation; l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Soient maintenant λ la longitude, β la latitude du point (x, y, z) [*], en supposant que l'ellipsoïde en question soit la surface mathématique de la terre; on trouvera facilement qu'on a

$$x=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad y=\frac{a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},$$

$$z=\frac{a(1-e^2)\sin\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

de sorte qu'on peut regarder λ et β comme les coordonnées indépendantes (p, q au § I).

On tire de ces équations,

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{-a\sin\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\qquad \frac{dy}{d\lambda}=\frac{a\cos\lambda\cos\beta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\beta}},\quad \frac{dz}{d\lambda}=0,$$

$$\frac{dx}{d\beta}=\frac{-a\cos\lambda\cos\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},\qquad \frac{dy}{d\beta}=\frac{-a\sin\lambda\sin\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},$$

$$\frac{dz}{d\beta}=\frac{a\cos\beta(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\beta)^3}},$$

---

[*] La longitude est l'angle que la courbe méridienne, c'est-à-dire la demi-ellipse passant par le point (x, y, z) et dont le plan passe par l'axe de

et de là (§ I),

$$E = \frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta}, \quad F = 0, \quad G = \frac{a^2 (1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^3}.$$

L'équation différentielle (5) est, dans ce cas,

$$\frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta} d\lambda + i \frac{a^2 (1 - e^2) \cos \beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^2} d\beta = 0;$$

donc

$$\nu = \nu' = \frac{1 - e^2 \sin^2 \beta}{a^2 \cos^2 \beta}, \quad h = \frac{1}{E \nu \nu'} = \frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta},$$

et, en multipliant par ν,

$$d\lambda + i \frac{(1 - e^2)\, d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = 0,$$

$$\lambda + i (1 - e^2) \int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = \varphi + i \psi,$$

d'où il résulte

$$\varphi = \lambda, \quad \psi = (1 - e^2) \int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta}.$$

Pour trouver cette intégrale, nous ferons $\sin \beta = x$, et nous aurons

$$\int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta) \cos \beta} = \int \frac{\cos \beta\, d\beta}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)(1 - \sin^2 \beta)}$$

$$= \int \frac{dx}{(1 - e^2 x^2)(1 - x^2)}$$

$$= \int \left(\frac{dx}{1 + x} + \frac{dx}{1 - x} - e^2 \frac{dx}{1 - ex} - e^2 \frac{dx}{1 + ex} \right) \frac{1}{2(1 - e^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1 - e^2)}\, l. \left[\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \cdot \left(\frac{1 - e \sin \beta}{1 + e \sin \beta} \right)^e \right]$$

$$= \frac{1}{1 - e^2}\, l. \left[\operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} \beta \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \beta}{1 + e \sin \beta} \right)^{\frac{e}{2}} \right];$$

---

rotation, fait avec une courbe méridienne déterminée, prise pour première méridienne; elle est comptée de 0 à 360 degrés, et sur la terre, de l'ouest à l'est. La latitude, c'est l'angle que la normale à l'ellipsoïde dans le point (x, y, z) fait avec le plan des xy (l'équateur); elle est comptée sur la terre, du pôle sud au pôle nord, de -90 à $+90$ degrés.

donc enfin,

$$(10)\quad \varphi = \lambda,\quad \psi = l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1 - e\sin\beta}{1 + e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right].$$

Quant aux points du plan, nous les rapporterons à deux axes rectangulaires des x et y, et nous aurons pour l'élément linéaire $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, faisons $\mathrm{H} = 1$, $\Phi = x$, $\Psi = y$; donc l'équation (8) sera

$$(11)\left\{\begin{aligned} x + iy &= f\left\{\lambda \mp i\,l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1 - e\sin\beta}{1 + e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\} \\ &= f\left\{\lambda \pm i\,l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1 + e\sin\beta}{1 - e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

équation qui déterminera les valeurs de x et y par celles de λ et β, c'est-à-dire qui donnera le point (x, y) du plan qui correspond au point dont la longitude est λ et la latitude β sur l'ellipsoïde. Quant à m, on trouve

$$(12)\left\{\begin{aligned} m = \sqrt{\begin{aligned} &f'\left\{\lambda + i\,l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1 + e\sin\beta}{1 - e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\} \\ &\times f'\left\{\lambda - i\,l\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\beta\right)\cdot\left(\frac{1 + e\sin\beta}{1 - e\sin\beta}\right)^{\frac{e}{2}}\right]\right\}\end{aligned}} \\ \times \frac{\sqrt{1 - e^2\sin^2\beta}}{a\cos\beta}. \end{aligned}\right.$$

En déterminant convenablement la fonction arbitraire f, on trouvera les diverses méthodes employées pour le tracé des cartes géographiques, et l'on verra facilement qu'en déterminant ce tracé par cette équation, on satisfera à la condition la plus naturelle que la carte devra remplir, c'est-à-dire que les éléments de la carte soient semblables aux éléments qu'ils doivent représenter.

Pour ne pas compliquer les calculs, nous supposerons la terre sphérique de rayon a; alors nous aurons $e=0$, et l'équation (11) sera

$$(11') \qquad x+iy=f\left[\lambda \pm il.\,\mathrm{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right)\right].$$

V.

Soit $f(x)=kx$, k étant une constante; on aura par les équations (11') et (12),

$$x=k\lambda, \quad y=\pm kl\ \mathrm{tang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right), \quad m=\frac{k}{a\cos\beta}.$$

Nous choisirons le signe inférieur, et nous aurons

$$x=k\lambda, \quad y=kl.\,\mathrm{cotang}\left(45^\circ-\frac{1}{2}\beta\right), \quad m=\frac{k}{a\cos\beta}.$$

Il suit de là que, tant que λ est constant, x le sera aussi, et que y sera constant en même temps que β; donc la carte sera telle, que les méridiens sont représentés par des lignes droites parallèles à l'axe des y, et les cercles de même latitude (parallèles à l'équateur) par des droites parallèles à l'axe des x. L'origine des x, y représente le point dont la longitude et la latitude sont zéro. L'axe des x ($y=0$) représente l'équateur, l'axe des y ($x=0$) le premier méridien. Quant à la valeur de m, elle est k pour les points sur l'équateur ($\beta=0$), et elle devient d'autant plus grande que β se rapproche de $\pm 90^\circ$, c'est-à-dire dès qu'on le rapproche des pôles. Une telle carte ne peut donc jamais contenir les pôles.

On aura déjà remarqué qu'une carte telle que nous venons de la décrire est une carte maritime exécutée d'après Mercator.

Soit $f(x)=ke^{ix}$, k étant une constante; on trouvera

$$x=\frac{k\cos\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}, \quad y=\frac{k\sin\lambda\cos\beta}{1+\sin\beta}, \quad m=\frac{k}{a(1+\sin\beta)},$$

en ne retenant que le signe inférieur.

Il suit de là

$$y = x \operatorname{tang} \lambda, \quad x^2 + y^2 = k^2 \operatorname{tang}^2 \left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right),$$

c'est-à-dire que les méridiens sont représentés par des lignes droites passant par l'origine des coordonnées, les parallèles sont représentés par des cercles dont le centre est à l'origine des coordonnées; k est le rayon du cercle représentant l'équateur ($\beta = 0$); l'origine des coordonnées représente le pôle nord (λ quelconque, $\beta = 90^\circ$). L'axe positif des x ($y = 0$) représente le premier méridien, l'axe des y celui de 90 degrés. La valeur de m varie de $\frac{k}{a}$ à $\frac{k}{2a}$; donc, la défiguration ne sera point très-grande. On sait que cette espèce de carte est une de celles par lesquelles on représente les hémisphères (projection stéréographique, l'hémisphère boréal étant vu du pôle austral).

Faisons enfin

$$f(x) = \frac{k}{i} \frac{e^{xi} - 1}{e^{xi} + 1},$$

et retenons le signe inférieur; nous aurons

$$x = \frac{k \sin \lambda \cos \beta}{1 + \cos \lambda \cos \beta}, \quad y = \frac{k \sin \beta}{1 + \cos \lambda \cos \beta},$$

$$m = \frac{k}{a(1 + \cos \lambda \cos \beta)},$$

et, par suite,

$$x^2 + y^2 + 2kx \operatorname{cotang} \lambda = k^2,$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2k}{\sin \beta} y = -k^2.$$

Donc les méridiens seront représentés par des cercles de rayon variable $\frac{k}{\sin \lambda}$, dont les coordonnées du centre sont $-k \operatorname{cotang} \lambda$, 0; les parallèles seront représentés aussi par des cercles de rayon variable k cotang β, et dont les coordonnées du centre sont o, $\frac{k}{\sin\beta}$.

L'origine des coordonnées est le point $\beta = 0$, $\lambda = 0$; l'axe des x l'équateur ($y = 0$, $\beta = 0$), l'axe des y le premier méridien ($x = 0$, $\lambda = 0$). Quant à la valeur de m, elle varie de $\frac{k}{a}$ à $\frac{k}{2a}$. On sait que cette espèce de carte est employée pour les mappemondes (projection stéréographique, l'hémisphère étant vu d'un point de l'équateur).

Comme il s'agissait seulement d'indiquer l'application des principes exposés aux §§ I et III, nous n'ajouterons rien à ce qui précède, et nous ferons remarquer seulement que ces principes reçoivent leur application dans la théorie des calculs de haute géodésie, et que M. Gauss en a exposé les éléments dans ses recherches intitulées : *Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodæsie.*