NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-A. SERRET

Extrait d'une lettre adressée à M. Terquem

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 22-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__22_1>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. TERQUEM,

PAR M. J.-A. SERRET,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

« J'ai eu plusieurs fois l'occasion de constater, en fai-
» sant les examens d'admission à l'École Polytechnique,
» que les candidats ne connaissent que des démonstra-
» tions défectueuses, à tous égards, des formules sur
» lesquelles repose la construction des Tables de loga-
» rithmes. Peut-être jugerez-vous utile, au point de vue
» de l'enseignement, et dans l'intérêt des candidats, de
» publier les détails que je vous envoie à ce sujet. »

I.

Développement en série de $-l(1-u)$, *où* u *est un nombre positif inférieur à* 1.

Soit x une quantité que nous ferons varier depuis $x=0$ jusqu'à $x=u$; u est une constante positive inférieure à 1. Posons

$$f(x) = -l(1-x) \text{ [*]}; \tag{1}$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1-x}$, et l'on peut écrire

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}. \tag{2}$$

Posons aussi

$$\varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}, \tag{3}$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; on aura

$$\varphi'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}. \tag{4}$$

En retranchant l'équation (4) de l'équation (2), il vient

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Le second membre de cette équation est positif, et il est moindre que $\frac{x^n}{1-u}$, tant que x n'est pas égal à u; on a donc

$$f'(x) - \varphi'(x) > 0, \tag{5}$$

$$f'(x) - \varphi'(x) - \frac{x^n}{1-u} < 0. \tag{6}$$

---

[*] La caractéristique l désigne exclusivement les logarithmes népériens, c'est-à-dire ceux dont la base est $e = 2.71828\ldots$

Ces inégalités montrent que les fonctions $f(x) - \varphi(x)$ et $f(x) - \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, sont, la première croissante, la deuxième décroissante, quand x croît de o à u. En effet, la première de ces fonctions a une dérivée constamment positive (inégalité 5), tandis que la deuxième a une dérivée constamment négative (inégalité 6). D'ailleurs les fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x = 0$, donc, pour $x = u$, la première est positive et la deuxième est négative. Ainsi on a

$$f(u) - \varphi(u) > 0,$$
$$f(u) - \varphi(u) - \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)} < 0,$$

ou

$$f(u) > \varphi(u),$$
$$f(u) < \varphi(u) + \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)};$$

c'est-à-dire que $f(u)$ est égal à $\varphi(u)$ augmenté d'une quantité positive moindre que $\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$; cette quantité peut évidemment se représenter par $\theta \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, en désignant par θ une fraction comprise entre o et 1. D'après cela, on a

$$f(u) = \varphi(u) + \frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)},$$

ou

$$(7) \qquad -l(1-u) = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{u^n}{n} + \frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}.$$

La quantité u étant inférieure à 1, on voit que $\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$ tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$8) \qquad -l(1-u) = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots,$$

formule dont le second membre est une série convergente, tant que l'on a $u < 1$.

II.

Développement en série de $l(1+u)$, *où* u *est un nombre positif égal ou inférieur à* 1.

Soit x une quantité variable entre les limites 0 et u; u est une constante positive égale ou inférieure à 1. Posons

$$(1) \qquad f(x) = l(1+x);$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1+x}$; et l'on peut écrire ces deux égalités,

$$(2) \quad \begin{cases} f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp \dfrac{x^n}{1+x}, \\ f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^{n-1} \mp x^n \pm \dfrac{x^{n+1}}{1+x}. \end{cases}$$

Posons aussi

$$(3) \qquad \varphi(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n},$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; nous aurons

$$(4) \qquad \varphi'(x) = 1 - x + x^2 - \ldots \pm x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation (4) de chacune des équations (2), on obtient

$$(5) \qquad f'(x) - \varphi'(x) = \mp \frac{x^n}{1+x},$$

$$(6) \qquad f'(x) - \varphi'(x) \pm x^n = \pm \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

Les seconds membres de ces deux équations sont de signes contraires; par conséquent, les deux fonctions $f(x) - \varphi(x)$

et $f(x) - \varphi(x) \pm \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant leurs dérivées de signes contraires, sont l'une croissante, l'autre décroissante, quand x croît de o à u. Or les deux fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x = 0$; donc, pour $x = u$, elles sont de signes contraires. On a donc

$$f(u) - \varphi(u) > 0,$$
$$f(u) - \varphi(u) \pm \frac{u^{n+1}}{n+1} < 0,$$

ou

$$f(u) - \varphi(u) < 0,$$
$$f(u) - \varphi(u) \pm \frac{u^{n+1}}{n+1} > 0.$$

Dans les deux cas on peut écrire, en désignant par θ un nombre positif inférieur à 1,

$$f(u) = \varphi(u) \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1}:$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \pm \frac{u^n}{n} \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1}.$$

La quantité u étant égale ou inférieure à 1, $\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro, à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$(8) \qquad l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots,$$

formule dont le second membre est une série convergente tant que l'on a $u < 1$ ou $u = 1$.

Remarque. Il résulte, de ce qui précède, que l'on a

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

pour toute valeur u de x comprise entre -1 et $+1$.

Cette formule a lieu encore pour $x = 1$, et même pour $x = -1$, car, dans ce cas, les deux membres sont infinis.

III.

Calcul des logarithmes népériens.

Reprenons les deux formules

$$l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots,$$

$$-l(1-u) = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots;$$

il vient, en ajoutant et observant que

$$l(1+u) - l(1-u) = l\frac{1+u}{1-u},$$

$$(1) \qquad l\frac{1+u}{1-u} = 2\left(\frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right).$$

La quantité $\frac{1+u}{1-u}$ étant plus grande que 1, posons

$$\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{h}{N} = \frac{N+h}{N},$$

d'où

$$u = \frac{h}{2N+h};$$

l'équation (1) devient, en observant que

$$l\frac{N+h}{N} = l(N+h) - lN,$$

$$(2) \; l(N+h) = lN + 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \ldots\right].$$

Cette formule, où N et h désignent deux nombres positifs quelconques, permet de calculer $l(N+h)$ quand on connaît lN.

Si l'on néglige, dans le second membre de l'équation (2), tous les termes qui suivent $2\frac{h^{2i+1}}{(2i+1)(2N+h)^{2i+1}}$, l'erreur commise sera évidemment moindre que

$$2\frac{h^{2i+3}}{(2i+3)(2N+h)^{2i+3}}\left[1+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^2+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^4+\ldots\right],$$

c'est-à-dire moindre que

$$\frac{h^{2i+3}}{2(2i+3)N(N+h)(2N+h)^{2i+1}}.$$

En particulier, si l'on néglige, dans la série de l'équation (2), tous les termes qui suivent le premier, et que l'on écrive simplement

$$(3)\qquad l(N+h)=lN+\frac{2h}{2N+h},$$

l'erreur commise sera moindre que $\frac{h^3}{6N(N+h)(N+2h)}$, et, à plus forte raison, moindre que $\frac{1}{6}\left(\frac{h}{N}\right)^3$.

En faisant $N=1$ et $h=1$ dans l'équation (2), on obtient

$$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\frac{1}{7.3^7}+\ldots\right),$$

ce qui donne, en prenant neuf décimales,

$$l2=0{,}693147180.$$

Le logarithme de 2 étant connu, la formule (2) permettra de calculer successivement les logarithmes népériens de tous les nombres entiers.

Faisons, par exemple, $N=8$ et $h=2$ dans l'équation (2); il vient

$$l10=l8+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\ldots\right).$$

Cette formule donne la valeur de $l=10$, car $l8=3l2$;

on trouve, en prenant neuf décimales,

$$l\,10 = 2{,}302585093.$$

IV.

Calcul des logarithmes vulgaires.

Le module M des logarithmes vulgaires est l'inverse du logarithme népérien de 10; on a donc

$$M = \frac{1}{2{,}302585093},$$

ou, en effectuant la division,

$$(1) \qquad M = 0{,}434294482.$$

Le module une fois connu, il est aisé de calculer les logarithmes vulgaires des nombres. En effet, les logarithmes vulgaires, que nous dénoterons à l'aide de la caractéristique log, s'obtiennent en multipliant par M les logarithmes népériens; par conséquent, l'équation (2) du paragraphe précédent donnera

$$(2) \quad \log(N+h) = \log N + 2M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \dots\right].$$

En faisant $h = 1$, cette formule devient

$$(3) \quad \log(N+1) = \log N + 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \dots\right].$$

A l'aide de cette équation (3) on pourra calculer successivement les logarithmes des nombres compris entre 1 et 10, ou entre 100 et 1000, ou généralement compris entre deux puissances quelconques de 10.

On abrége considérablement les calculs en faisant usage de la méthode des différences, dont nous n'avons pas à parler ici. Les calculateurs qui ont construit les Tables que nous possédons, ont employé les équations (2) et (3), ainsi que quelques autres qui se déduisent de celles-ci par des transformations faciles, et qui renferment des séries plus convergentes. Si, par exemple, on remplace N par

$N^2 - 1$, dans l'équation (3), elle devient

$$\log N^2 = \log(N^2 - 1) + 2M\left[\frac{1}{2N^2-1} + \frac{1}{3(2N^2-1)^3} + \dots\right],$$

ou

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \log N &= \frac{\log(N+1) + \log(N-1)}{2} \\ &+ M\left[\frac{1}{2N^2-1} + \frac{1}{3(2N-1)^3} + \dots\right]. \end{aligned}\right.$$

La série qui entre dans le second membre de cette équation (4) est très-convergente; en se bornant au premier terme de cette série, l'erreur que l'on commet ne peut affecter la dixième décimale, si N est égal ou supérieur à 20. L'équation (4) peut servir à calculer $\log(N+1)$ quand on connaît $\log N$ et $\log N - 1$; elle donne aussi le moyen de calculer successivement les logarithmes des nombres premiers. En effet, supposons que N soit un nombre premier, et que les logarithmes des nombres premiers inférieurs à N soient connus; l'équation (3) fera connaître $\log N$, car $N+1$ et $N-1$ étant des nombres composés de facteurs premiers inférieurs à N, leurs logarithmes s'obtiendront par de simples additions.

Pour calculer les logarithmes des premiers nombres 2, 3, etc., il faudrait prendre plusieurs termes dans la série qui entre dans le second membre de celle des formules (2), (3) ou (4) que l'on emploie; mais on peut, par des artifices convenables, obtenir pour ces cas particuliers des séries beaucoup plus convergentes, dans lesquelles on pourra se borner au premier terme, ou aux deux premiers termes. Nous allons en présenter deux exemples.

Premier exemple. *On demande le logarithme de 2 avec douze décimales.* On fera $N = 1000$ et $h = 24$, dans l'équation (2), qui devient

$$\log 1024 = \log 1000 + 2M\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \dots\right];$$

or $1024 = 2^{10}$, $\log 1024 = 10 \log 2$, $\log 1000 = 3$; donc

$$\log 2 = 0,3 + \frac{2M}{10}\left[\frac{24}{2024} + \frac{1}{3}\left(\frac{24}{2024}\right)^3 + \ldots\right],$$

et il est aisé de voir que les deux premiers termes de la série du second membre suffisent pour obtenir $\log 2$ avec douze décimales.

Second exemple. *On demande le logarithme de* 3 *avec dix décimales.* On fera $N = 65536$ et $h = 74$ dans l'équation (2), qui devient

$$\log 65610 = \log 65536 + 2M\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right);$$

or $65610 = 3^8 \times 10$, $65536 = 2^{16}$; donc

$$8 \log 3 + 1 = 16 \log 2 + 2M\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right),$$

ou

$$\log 3 = 2 \log 2 - 0,125 + \frac{M}{4}\left(\frac{74}{131146} + \ldots\right),$$

et il est aisé de voir que le premier terme de la série du second membre suffit pour qu'on puisse calculer $\log 3$ avec dix décimales.

Nous nous bornerons aux deux exemples qui précèdent; mais nous croyons devoir rappeler ici que M. Koralek a fait connaître récemment un procédé très-ingénieux qui permet de calculer rapidement, avec sept décimales, le logarithme vulgaire d'un nombre quelconque compris entre 1 et 10000000. La méthode de M. Koralek exige seulement que l'on connaisse le module M et les logarithmes des cinq nombres 2, 3, 7, 11, 13.

V.

Sur la proportion qu'on établit entre les petits accroissements d'un nombre et les accroissements correspondants de son logarithme.

Quand on fait usage des Tables de logarithmes, on admet que *les petits accroissements du logarithme d'un nombre* $N > 10000$ *sont proportionnels aux accroissements correspondants de* N.

Nous allons démontrer que l'erreur commise, en appliquant ce principe, ne peut avoir d'influence sur la septième décimale du logarithme que l'on calcule.

Nous avons établi la formule

$$l(1+u) = \frac{u}{1} - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \pm \frac{u^n}{n} \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1},$$

où θ est un nombre compris entre 0 et 1.

Si M désigne le module des logarithmes vulgaires, on déduit, de cette formule,

$$\log(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots \pm \frac{u^n}{n} \mp \frac{\theta u^{n+1}}{n+1}\right),$$

et, en faisant $n = 1$,

$$\log(1+u) = M\left(u - \frac{\theta u^2}{2}\right).$$

Posons successivement $u = \frac{1}{N}$, $u = \frac{h}{N}$, et désignons par α et 6 les valeurs comprises entre 0 et 1 que prend alors θ; on aura

$$(1) \qquad \log(N+1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\alpha}{2N^2}\right),$$

$$(2) \qquad \log(N+h) - \log N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{6 h^2}{2N^2}\right).$$

Désignons par Δ la différence tabulaire

$$\log(N+1) - \log N;$$

et par D la différence

$$\log(N+h) - \log N;$$

on déduira, des équations (1) et (2),

$$D - \Delta h = M\frac{\alpha h - 6 h^2}{2N}.$$

Or nous supposons $h < 1$; $\alpha h - 6 h^2$ est donc, en valeur absolue, moindre que 1 ; M est aussi plus petit que 1 et même plus petit que $\frac{1}{2}$; N^2 est au moins égal à 10000^2, c'est-à-dire au moins égal à 100000000. Donc, en prenant

$$D - \Delta h = 0,$$

c'est-à-dire en admettant la proportion

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{h}{1},$$

l'erreur que l'on commet est certainement plus petite que le quart d'une unité du huitième ordre décimal.