H. Faure

Solution de la question 145 (Wallis)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 189-191
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__189_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 145 (WALLIS)

(voir t. VI, p. 216);

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

La surface dont il s'agit ici peut être considérée comme engendrée par une droite mobile assujettie à rester parallèle à un plan fixe, et à s'appuyer constamment sur une ellipse et sur une droite parallèle au plan de cette courbe. Prenons pour plan des XY le plan directeur, pour plan des YZ, celui de l'ellipse directrice, et supposons, de plus, que les axes OY, OZ soient menés parallèlement à deux diamètres conjugués de l'ellipse.

Les équations des directrices seront : pour la droite,

$$x = m, \quad y = nz + p;$$

pour l'ellipse,

$$x = 0, \quad a^2 y^2 + b^2 z^2 = a^2 b^2.$$

Les équations de la génératrice seront de la forme

$$z = \alpha, \quad y = 6x + \gamma.$$

En exprimant qu'elle s'appuie constamment sur les directrices, on trouvera entre α, 6, γ, les deux relations

$$n\alpha + p = 6m + \gamma, \quad a^2\gamma^2 + b^2\alpha^2 = a^2 b^2.$$

Éliminant α, 6, γ entre ces deux équations et celles de la génératrice, on obtient l'équation

$$a^2(my - px - nxz)^2 = (x - m)^2(a^2 - z^2)b^2.$$

Elle représente un conoïde qui ne peut être coupé suivant une conique que par des plans parallèles à celui des XZ. Du reste, un tel plan donnera toujours pour section une ellipse.

Soit $x = \varepsilon$ un de ces plans; la section sur le plan des YZ, où elle se trouve projetée en vraie grandeur, aura pour équation

$$\begin{aligned} m^2 y^2 - 2mn\varepsilon yz + \left[n^2\alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon - m)\right] z^2 \\ - 2pm\varepsilon y + 2n\varepsilon^2 pz + p^2\varepsilon^2 = 0 \\ - b^2(\varepsilon - m)^2. \end{aligned}$$

Appelons A^2 le carré de la surface de cette ellipse, on a

$$A^2 = -\frac{4L^2\sin^2\gamma}{m^3}\pi^2,$$

γ étant l'angle formé par les axes des Y et des Z.

Or, ici on trouve

$$m = -\frac{4m^2 b^2(\varepsilon - m)^2}{a^2}$$

et

$$L = \frac{4 m^2 b^4 (\varepsilon - m)^4}{a^2}:$$

donc

$$A^2 = \frac{a^2 b^2 (\varepsilon - m)^2 \pi \sin^2 \gamma^2}{m^2},$$

d'où

$$A = \frac{\pi ab - \sin \gamma (\varepsilon m)}{m};$$

par suite, le volume sera

$$V = \int_0^m A \, d\varepsilon = \frac{1}{2} \pi ab m \sin \gamma.$$

Ce volume est donc la moitié de celui d'un cylindre qui aurait pour base l'ellipse directrice, et pour hauteur la perpendiculaire abaissée de la droite sur le plan de l'ellipse.