NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LECOINTE

Solution de la question 235

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 187-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__187_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 235

(voir t. X, p. 183),

PAR M. L'ABBÉ LECOINTE,
Professeur au séminaire de Vals.

Résoudre en nombres rationnels l'équation

$$x^y = y^x.$$

Solution. Supposons que $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ soit une des solutions demandées, on aura

$$x^{\frac{p}{q}} = y^{\frac{m}{n}}, \quad \text{ou bien} \quad x^{pn} = y^{mq}$$

ou bien encore, en posant $pn = r$, $mq = t$,

$$x^r = y^t.$$

Les valeurs $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ satisferont donc au système des deux équations

$$x^y = y^x,$$
$$x^r = y^t.$$

Cela posé, cherchons à résoudre le système de ces deux équations ; on a

$$y \log x = x \log y,$$
$$r \log x = t \log y,$$

d'où

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{t}, \quad y = \frac{r}{t}\, r,$$

(1) $$x = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{t}{r-t}},$$

(2) $$y = \left(\frac{r}{t}\right)^{\frac{r}{r-t}}.$$

Par conséquent, pour avoir toutes les solutions demandées, il n'y a qu'à choisir r et t de telle sorte que ces valeurs de x et y soient rationnelles, et pour cela, comme $\frac{r}{r-t} = \frac{t}{r-t} + 1$, il suffira de satisfaire à l'équation

$$\frac{t}{r-t} = e,$$

e étant un nombre entier quelconque, par des valeurs entières de r et t.

Or cette équation peut se mettre sous la forme.

$$\frac{1+e}{e} = \frac{r}{t};$$

donc, pour avoir les solutions rationnelles de l'équation

$$x^y = y^x,$$

il suffira de donner à e une valeur entière quelconque, de poser ensuite

$$r = 1 + e,$$
$$t = e,$$

et de substituer ces valeurs dans les expressions (1) et (2) de x et y, ce qui revient à prendre pour formules générales donnant les solutions de la question proposée,

$$x = \left(\frac{1+e}{e}\right)^e, \quad y = \left(\frac{1+e}{e}\right)^{1+e};$$

expressions dans lesquelles e désigne un nouvel entier quelconque.

Observation. Indépendamment des solutions données par les formules précédentes, l'équation proposée en admet une infinité d'autres; mais, comme elles sont évidentes, il est inutile d'en parler.

Note. Une autre solution très-bonne donnée par M. Gennochi exige une trop longue discussion.