STREBOR

Sur la division des arcs de quelques courbes, dérivées d'une section conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 182-186

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__182_1>

SUR LA DIVISION DES ARCS DE QUELQUES COURBES, DÉRIVÉES D'UNE SECTION CONIQUE;

Par M. STREBOR.

Dans le tome III des *Nouvelles Annales*, page 506, on trouve la démonstration des théorèmes à l'aide desquels on peut déterminer géométriquement des arcs sur une ellipse ou sur une hyperbole, dont la différence est rectifiable. Les constructions dont il s'agit s'effectuent au moyen de coniques homofocales avec la donnée.

M. Chasles a remarqué que les arcs d'une hyperbole équilatère à différence rectifiable répondent à des arcs égaux sur la lemniscate qui dérive de l'hyperbole. Cet énoncé s'applique également, en regardant la lemniscate comme dérivée de l'hyperbole par la méthode des rayons vecteurs réciproques, ou bien comme lieu des projections orthogonales du centre de l'hyperbole sur ses tangentes.

Considérons, plus généralement, la courbe qu'on obtient d'une conique centrale quelconque, par la construction des rayons vecteurs réciproques issus du centre. Dans le cas d'une ellipse, les arcs de cette courbe, qui répondent aux arcs d'ellipse à différence rectifiable, ont pour différence un arc de cercle; et pour l'hyperbole, les arcs de la courbe dérivée qui répondent aux arcs à différence rectifiable, ont pour différence une quantité circulaire ou logarithmique, selon que l'axe imaginaire de l'hyperbole est plus grand ou plus petit que son axe réel.

On sait que la courbe qu'on vient de considérer est aussi le lieu des projections orthogonales du centre d'une conique sur ses tangentes. Par conséquent, on peut déterminer sur une telle courbe, dérivée d'une ellipse, des arcs à différence circulaire; car ces arcs répondent évidemment à des arcs à différence rectifiable sur l'ellipse ayant pour axes les réciproques des axes de l'ellipse donnée; et pareillement pour l'hyperbole.

Maintenant, supposons qu'on dérive d'une ellipse une courbe, en projetant le centre orthogonalement sur les tangentes, et de cette nouvelle courbe une autre, en répétant la même construction, et ainsi de suite. En désignant l'ellipse comme la première de cette série, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une courbe quelconque de cette série d'ordre impair, qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur la première, c'est-à-dire sur l'ellipse, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire.

Les arcs de la quatrième, sixième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair, qui répondent à des arcs à différence circulaire sur la seconde, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire.

Considérons la courbe, enveloppe des perpendiculaires menées aux extrémités des diamètres d'une ellipse, et supposons qu'on dérive de cette courbe une autre courbe d'après la même méthode de génération, et ainsi de suite. En regardant l'ellipse comme la première, on peut énoncer les deux théorèmes que voici :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre impair qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur la première, ont pour différence une quantité algébrique.

Les arcs de la deuxième, quatrième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair qui répondent à des arcs à différence circulaire sur la courbe, lieu des projections orthogonales du centre de l'ellipse (la première) sur ses tangentes, ont pour différence une quantité algébrique.

Supposons qu'on dérive d'une hyperbole une suite de courbes se succédant d'après la première des deux lois qu'on vient de considérer pour l'ellipse; on aura donc deux théorèmes que voici :

Les arcs de la troisième, cinquième courbe, et d'une *courbe quelconque d'ordre impair qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur l'hyperbole (la première), ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire ou logarithmique, selon que l'axe réel de l'hyperbole est plus petit ou plus grand que son axe imaginaire.*

Les arcs de la quatrième, sixième courbe, et d'une courbe quelconque d'ordre pair, qui répondent à des arcs à différence circulaire (ou logarithmique) sur la seconde, ont pour différence une quantité composée de deux parties, l'une algébrique et l'autre circulaire (ou logarithmique).

On doit observer que, si les arcs des courbes d'ordre impair admettent dans leurs différences une quantité circulaire (ou logarithmique), la quantité analogue qui figure dans les courbes d'ordre pair sera logarithmique (ou circulaire), et *vice versâ*.

Ces théorèmes se simplifient beaucoup pour l'hyperbole équilatère. Dans ce cas, les arcs d'une courbe quelconque de la série, d'un ordre pair ou impair, qui répondent à des arcs à différence rectifiable sur l'hyperbole, ont eux-mêmes une différence rectifiable. Cette différence s'évanouit pour la seconde, c'est-à-dire pour la lemniscate ; ce qui s'accorde avec le théorème de M. Chasles.

Des théorèmes analogues à ceux que nous avons constatés dans le cas de l'ellipse, existent pour la série de courbes dérivées de l'hyperbole, d'après la seconde des lois que nous avons considérées. Une partie algébrique seulement se trouve dans les différences des arcs des courbes dont il s'agit.

Je finirai en mentionnant un théorème de géométrie sphérique :

Les arcs d'une hyperbole équilatère sphérique (de première espèce), qui ont pour différence un arc de

grand cercle, répondent à des arcs égaûx sur la sphéro-lemniscate (de première espèce) qui dérive de l'hyperbole.
(*Voir* les *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 135-137.)