JAUFROID

Analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 158-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__158_1>

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ;

PAR M. JAUFROID,
Professeur de mathematiques au college de Cette.

1. Le but de cet article est de traiter généralement la résolution en nombres entiers d'une équation du premier degré à un nombre quelconque d'inconnues.

Nous supposons démontré que l'équation

$$ax + by + c = 0,$$

a et b étant premiers entre eux, a toutes ses solutions en nombres entiers contenues dans les formules

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at,$$

α et β étant une de ces solutions.

II. Soit l'équation

$$ax + by + cz + dv + \ldots + mu + n = 0,$$

$a, b, c, d, \ldots, m$ n'ont pas de diviseur commun ; soient, de plus, a et b premiers entre eux, je pose

$$(1) \qquad \begin{cases} x = Az + Bv + \ldots + Lu + M, \\ y = A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1, \end{cases}$$

et je dis qu'on peut trouver, pour $A, B, \ldots, L, M$, $A_1, B_1, \ldots, L_1, M_1$, des nombres entiers tels, que les valeurs des équations (1) satisfassent à l'équation proposée, indépendamment de toutes valeurs données à $z, v, \ldots, u$. En effet, la substitution donne

$$(aA + bA_1 + c)z + (aB + bB_1 + d)v + \ldots$$
$$+ (aL + bL_1 + m)u + aM + bM_1 + n = 0,$$

ce qui exige qu'on ait séparément

$$aA + bA_1 + c = 0, \qquad aB + bB_1 + d = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$aL + bL_1 + m = 0, \qquad aM + bM_1 + n = 0;$$

mais a et b étant premiers entre eux, toutes ces équations sont solubles en nombres entiers. Concevons qu'on prenne une solution de chacune de ces équations, et que $A, B, \ldots, L, M, A_1, B_1, \ldots, L_1, M_1$ représentent les valeurs choisies, on aura l'identité suivante :

$$a(Az + Bv + \ldots + Lu + M)$$
$$+ b(A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1)$$
$$+ cz + dv + \ldots + mu + n = 0.$$

Par suite, l'équation proposée se met sous la forme

$$a(x - Az - Bv - \ldots - Lu - M)$$
$$+ b(y - A_1 z - B_1 v - \ldots - L_1 u - M_1) = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = Az + Bv + \ldots + Lu + M - bt,$$
$$y = A_1 z + B_1 v + \ldots + L_1 u + M_1 + at,$$

formules analogues à celles qu'on obtient pour le cas de deux inconnues, car on peut dire que les fonctions

$$x = \mathrm{A}z + \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{L}u + \mathrm{M},$$
$$y = \mathrm{A}_1 z + \mathrm{B}_1 v + \ldots + \mathrm{L}_1 u + \mathrm{M}_1,$$

sont une solution de l'équation proposée.

III. Supposons que a et b aient un plus grand commun diviseur δ, mais qu'ils soient premiers avec un des autres coefficients, c par exemple. Je pose

$$a = a_1\delta, \quad b = b_1\delta, \quad \text{et} \quad ax + by = \delta p;$$

d'où

(1) $$a_1 x + b_1 y = p.$$

L'équation proposée devient

$$\delta p + cz + dv + \ldots + mu + n = 0,$$

δ et c sont premiers entre eux; donc, d'après le § II, on aura

$$z = \mathrm{B}_2 v + \ldots + \mathrm{L}_2 u + \mathrm{M}_2 + \delta t,$$
$$p = \mathrm{B}_3 v + \ldots + \mathrm{L}_3 u + \mathrm{M}_3 - ct;$$

l'équation (1) devient alors

$$a_1 x + b_1 y - \mathrm{B}_3 v - \ldots - \mathrm{L}_3 u + ct - \mathrm{M}_3 = 0;$$

et, comme a_1 et b_1 sont premiers entre eux, elle donne

(2) $$\begin{cases} x = \mathrm{B}v + \ldots + \mathrm{L}u + \mathrm{M}t + \mathrm{N} - b_1 t', \\ y = \mathrm{B}_1 v + \ldots + \mathrm{L}_1 u + \mathrm{M}_1 t + \mathrm{N}_1 + a_1 t', \\ z = \mathrm{B}_2 v + \ldots + \mathrm{L}_2 u + \mathrm{M}_2 + \delta t. \end{cases}$$

Remarque. Si $\delta = 1$, on doit retomber sur le cas précédent; en effet, on peut résoudre par rapport à t la formule qui se rapporte à z, et porter cette valeur, qui est sous forme entière, dans celles de x et de y, qui prennent alors la forme indiquée précédemment. Les formules (2) comprennent donc les formules (1) du paragraphe précédent.

IV. Considérons encore le cas où a, b, c ont un plus grand commun diviseur δ, mais sont premiers avec d par exemple. Je pose

$$a = a_1\delta, \quad b = b_1\delta, \quad c = c_1\delta \quad \text{et} \quad ax + by + cz = \delta p.$$

Or

$$(1) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z = p;$$

l'équation proposée devient

$$\delta p + dv + er + .. + mu + n = 0.$$

δ et d sont premiers entre eux, par conséquent on a

$$v = C_3 r + \ldots + L_3 u + M_3 + \delta t,$$
$$p = C_4 r + \ldots + L_4 u + M_4 - dt;$$

alors l'équation (1) devient

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z - \ldots - L_4 u + dt - M_4 = 0,$$

et comme c_1 est premier avec a_1 et b_1, cette dernière équation tombe dans le cas précédent, et, en appelant δ' le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1, elle donne, en posant $a_1 = a_2\delta'$, $b_1 = b_2\delta'$,

$$x = C\,r + \ldots + L\,u + Mt + Nt' + P - b_2 t'',$$
$$y = C_1 r + \ldots + L_1 u + M_1 t + N_1 t' + P_1 + a_2 t'',$$
$$z = C_2 r + \ldots + L_2 u + M_2 t + \delta' t',$$
$$v = C_3 r + \ldots + L_3 u + M_3 t + \delta t.$$

Remarque. Si $\delta = 1$, les formules rentrent dans celles du § III. Si $\delta = 1$, $\delta' = 1$, elles rentrent dans celles du § II.

La marche du calcul est maintenant évidente, et l'on en déduit la généralisation suivante :

Si l'on choisit n inconnues dont les coefficients aient un plus grand commun diviseur δ, mais premiers avec le coefficient d'une des inconnues restantes, ces $n + 1$ inconnues s'expriment à l'aide de toutes les autres et de n indéterminées; l'inconnue, dont le coefficient est premier avec ceux des n autres, ne contient qu'une de ces indéterminées multipliée par δ. Le nombre des indéterminées augmente d'une unité d'une formule à une autre, jusqu'aux deux dernières qui les contiennent toutes.

On pourra, si quelques-unes des quantités δ', etc., étaient égales à l'unité, diminuer si on le veut le nombre des formules d'après ce qui a été remarqué §§ III et IV.

Si l'on considère un système de valeurs pour z, v,..., u, les valeurs correspondantes de x et de y forment deux progressions arithmétiques ayant pour raisons les quotients des coefficients de y et de x par leur plus grand commun diviseur.

Si l'on considère un système de valeurs pour v,..., u, et si l'on divise a et b par le plus grand commun diviseur de a, b, c, ce qui donne a_1 et b_1, les valeurs de z correspondantes forment une progression arithmétique ayant pour raison le plus grand commun diviseur de a_1 et b_1, et ainsi de suite.

On conclut facilement de la théorie précédente, que si tous les coefficients, à l'exception de celui d'une seule inconnue, ont un plus grand commun diviseur δ, mais sont premiers avec celui de cette inconnue, les valeurs de celle-ci forment une progression arithmétique ayant pour raison δ.

Note. Ce problème, étendu à un nombre quelconque d'équations du premier degré, est traité avec rigueur et élégance dans un Mémoire inédit de M. Lebesgue, sur l'analyse indéterminée du premier degré, que le célèbre arithmologue a bien voulu nous communiquer. Ce Mémoire fait partie d'une Théorie générale des nombres.

La nature de cet ouvrage demanderait une souscription à laquelle le Gouvernement devrait prendre une forte part. Les encouragements sont à réserver pour les auteurs d'élite qui s'adressent à un petit nombre de lecteurs et pour lesquels il faut pourtant écrire, nonobstant les préoccupations du jour; c'est l'opinion de Vitruve :

Cum animadvertissem distentam civitatem publicis et privatis negotiis, paucis judicavi scribendum (in præfatione libri quinti *de Architectura*).