TH. LOXHAY

Solution de la question 181 (Strebor)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 146-148
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__146_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 181 (STREBOR)

(voir t. VII, p 157);

PAR M. TH. LOXHAY,

Répétiteur à l'École militaire de Belgique.

L'énoncé doit être rectifié de la manière suivante : Démontrer la formule

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2\varphi}}\, d\varphi \\ &= \log\cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}\right.$$

(*) On peut voir, pour ce problème, le Mémoire de J.-A. Euler, intitulé : *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal* (Histoire de l'Académie de Berlin, année 1758, pages 284 à 353), et *la Théorie des effets du jeu de billard*, par G. Coriolis (chap. Ier, pages 51 à 77).

Pour démontrer cette formule, considérons seulement le premier membre, et posons

$$(2)\qquad (1-\sin^2 a\sin^2\varphi)(1-\sin^2 a\sin^2\omega)=\cos^2 a;$$

d'où

$$\sin^2\omega=\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a\sin^2\varphi}}.$$

Pour $\varphi=0$, on obtient $\omega=\frac{\pi}{2}$, et pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, on obtient $\omega=0$; de sorte qu'après la substitution de φ en ω, dans le premier membre de l'équation (1), l'intégrale sera encore prise entre les mêmes limites, pourvu que l'on en change le signe. De la formule (2) on tire

$$\sin^2\varphi=\frac{\cos^2\omega}{1-\sin^2 a\sin^2\omega};$$

d'où

$$d\varphi=-\frac{\cos a\,d\omega}{1-\sin^2 a\sin^2\omega}.$$

Remplaçant maintenant, dans le premier membre de la formule (1), les quantités en φ en fonction de celles en ω, on trouve, en simplifiant et en changeant le signe du second membre,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log(1-\sin^2 a\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{\cos^2 a}{1-\sin^2 a\sin^2\omega}\,\frac{d\omega}{\sqrt{1-\sin^2 a\sin^2\omega}}.$$

Mais on peut, sous le signe de l'intégrale définie, changer ω en une autre quantité variable sans modifier le résultat; changeons-y ω en φ et simplifions, on en tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}\, d\varphi$$

$$= 2\log\cos a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}\, d\varphi\right];$$

d'où, enfin,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-\sin^2 a \sin^2 \varphi)}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}\, d\varphi = \log\cos a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2 a \sin^2 \varphi}}.$$