Dieu

Concours d'agrégation, année 1847

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 131-138
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__131_0>

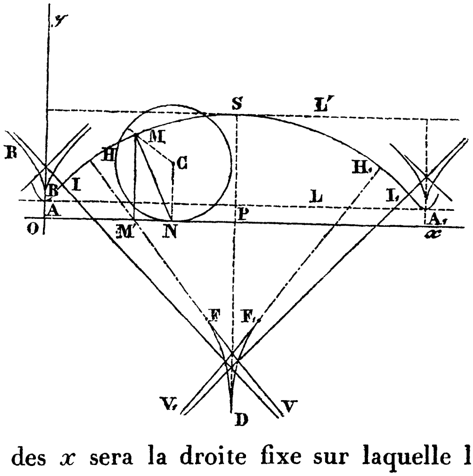
CONCOURS D'AGRÉGATION, ANNÉE 1847;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Cycloïdes allongées et raccourcies. — Tangentes. — Normales. — Rayons de courbure. — Développées. — Arc. — Segment.

I. *Cycloïdes allongées.* — Soient R le rayon du cercle, G le point intérieur qui engendre la cycloïde, et a la distance de ce point au centre C (*).



L'axe des x sera la droite fixe sur laquelle le cercle roule, et l'axe des y la perpendiculaire menée à cette

(*) Cet article, de même que le suivant, jusqu'aux rayons de courbure, sera facilement compris par les élèves de mathématiques spéciales. La figure se rapporte au cas de $n < 2$.

droite par la position A de G, où il en est à la distance minimum R — a.

Il est évident, à priori, que la courbe est indéfinie et comprise entre les droites L et L', dont les équations sont $y = R \mp a$; et que, le cercle roulant dans le sens des x positives, G s'éloigne de L en partant de A, atteint L en S où $x = \pi R$, puis revient sur L en A_1, après avoir décrit SA_1 symétrique de SA par rapport à l'ordonnée SP.

M (x, y) étant un point quelconque de l'arc ASA_1, qu'il suffit d'étudier, et N le point de contact correspondant du cercle avec l'axe des x; si l'on désigne par φ l'angle MCN (qui peut s'étendre de o à 2π), on a les équations

$$(1) \qquad x = R\varphi - a\sin\varphi \quad \text{et} \quad y = R - a\cos\varphi.$$

D'après ces équations, $y = R - a$ pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, auxquelles répondent $x = 0$ et $x = 2\pi R$; le maximum de y est $y = R + a$ répondant à $\varphi = \pi$ et $x = \pi R$; enfin, x a des valeurs équi-différentes de πR, et y des valeurs égales entre elles pour des valeurs de φ équi-différentes de π.

Tangentes. — Les équations (1) donnent

$$D_\varphi x = R - a\cos\varphi \quad \text{et} \quad D_\varphi y = a\sin\varphi.$$

On a donc, en désignant par y' la dérivée $D_x y$, et posant $R = an$,

$$(2) \qquad y' = \frac{\sin\varphi}{n - \cos\varphi},$$

d'où

$$D_\varphi y' = \frac{n\cos\varphi - 1}{(n - \cos\varphi)^2}.$$

Soit φ_1 le plus petit arc positif dont le cosinus soit

$\frac{1}{n}$ ou $\frac{a}{R}$, et soit I le point de AS correspondant à $\varphi = \varphi_1$, pour lequel $x = R\varphi_1 - a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$ et $y = R - a \cdot \frac{a}{R}$. On voit que, φ croissant de o à φ_1, $D_\varphi y'$ est positive et y' croissant de o à $\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}}$; et que, φ continuant de croître jusqu'à π, $D_\varphi y'$ est négative et y' décroissant jusqu'à zéro. Donc, les tangentes en A et S sont parallèles à Ox, l'arc AI est convexe et l'arc IS concave vers Ox, et il y a une inflexion en I.

Normales. — La normale en chaque point M passe par le point de contact correspondant du cercle et de l'axe des x, car l'abscisse, à l'origine de la normale, est

$$x + yy' = R\varphi,$$

d'après les équations (1) et (2).

Cette propriété, qui est commune à toutes les courbes engendrées comme les cycloïdes (*Nouvelles Annales*, tome X, page 212), conduit immédiatement à l'équation différentielle des cycloïdes allongées,

$$dx = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - (R - y)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$x = R \arc\cos \frac{R - y}{a} \mp \sqrt{a^2 - (R - y)^2}.$$

Rayon de courbure. — Le rayon de courbure en M étant désigné par ρ, en remarquant que $D_x y' = \frac{D_\varphi y'}{D_\varphi x}$, on a

$$(3) \qquad \rho = \pm \frac{R}{n} \frac{(1 + n^2 - 2n\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{n\cos\varphi - 1}.$$

(il faut prendre le signe + pour les arcs convexes vers

Ox, et le signe — pour les arcs concaves, si l'on veut que ρ soit positif). ρ est évidemment minimum en A où $\varphi = 0$ et $\rho = \frac{(R-a)^2}{a}$, et il est infini en I où $n \cos\varphi = 1$.

L'équation (3) donne

$$D_\varphi \rho = \pm R \sin\varphi (n\cos\varphi + n^2 - 2) \frac{(1 + n^2 - 2n\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1 - n\cos\varphi)^2}.$$

Sur AI, $D_\varphi \rho$ est positive (il faut prendre le signe +). Si $n > 2$, $D_\varphi \rho$ est négative de I en S où elle change de signe à cause du facteur $\sin\varphi$ (il faut prendre le signe —); donc ρ est *minimum* au point S. Si $n < 2$, $D_\varphi \rho$, d'abord négative quand φ croît à partir de φ_1, change de signe lorsque φ passe par la valeur φ_2, qui est déterminée par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{2 - n^2}{n},$$

et reste positive jusqu'à ce que φ atteigne la valeur π, puis devient ensuite négative; donc ρ est *minimum* en un point H de IS, dont les coordonnées sont

$$x = R\varphi_2 - a\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{R} - \frac{R}{a}\right)^2} \quad \text{et} \quad y = 2\left(R - a\frac{a}{R}\right)$$

(double de l'ordonnée du point I), et *maximum* en S.

Développées. — Il résulte de ce qui précède, que la développée de l'arc ASA_1 a des branches infinies dont les asymptotes sont les normales aux points I et I_1 (symétriques de I par rapport à SP), un point de rebroussement sur le prolongement de SP, et, quand $n < 2$, deux autres points de rebroussement qui répondent à H et à H_1 (symétrique de H par rapport à SP).

D'après les équations (1) et (2), celle de la normale en M est

$$(4) \qquad y_1 \sin\varphi + x_1(n - \cos\varphi) - R\varphi(n - \cos\varphi) = 0,$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées courantes. Par l'élimination de φ entre cette équation, et

(5) $\quad y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi - \mathrm{R}(n + \varphi \sin\varphi - \cos\varphi) = 0,$

que l'on forme en égalant à zéro la dérivée du premier membre par rapport à φ, on aurait l'équation de la développée. Mais cette équation est très-compliquée, et il serait préférable de rechercher la forme de la développée au moyen des valeurs de x_1 et y_1 qu'on tire des deux équations (4) et (5),

$$x_1 = \mathrm{R}\left(\varphi - \frac{n - \cos\varphi}{n\cos\varphi - 1}\sin\varphi\right),$$

et

$$y_1 = \mathrm{R}\frac{(n - \cos\varphi)^2}{n\cos\varphi - 1}.$$

Ces valeurs donnent, pour les points de rebroussement B et D, $y = \mathrm{R}.\frac{\mathrm{R} - a}{a}$, et $y = \mathrm{R}.\frac{\mathrm{R} + a}{a}$, qu'il est facile de construire; et, dans le cas de $n < 2$, pour le point de rebroussement C, $x = \mathrm{R}\varphi_2 + 2a\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\mathrm{R}} - \frac{\mathrm{R}}{a}\right)^2}$, $y = -4\left(\mathrm{R} - a\,\frac{a}{\mathrm{R}}\right)$, dont la comparaison avec les coordonnées de H montre qu'en ce point le rayon de courbure est triple de la normale.

On voit, du reste, par la discussion même de la cycloïde, que la développée a : 1° une branche infinie BR, concave vers Ox, répondant à AI; 2° une autre branche infinie FV, également concave vers Ox, répondant à IH seulement si $n < 2$, et à IS si $n \overset{=}{>} 2$; 3° lorsque $n < 2$, un arc FD, convexe vers Ox, qui répond à HS, et disparaît quand $n \overset{=}{>} 2$. Enfin, on remarquera que si n variait depuis 2 jusqu'à 1, les points F et F$_1$, d'abord réunis sur SP avec D, s'écarteraient de SP et tendraient vers A et

A_1, sur Ox, en même temps que les asymptotes s'inclineraient sur Ox et tendraient à s'y confondre.

Arc. — On a, en désignant par s l'arc AM,

$$ds = a\sqrt{1 + n^2 - 2n\cos\varphi}.d\varphi;$$

d'où, en posant $\varphi = \pi - 2\psi$,

$$ds = -2a(1+n)\sqrt{1 - \frac{4n}{(n+1)^2}\sin^2\psi}.d\psi.$$

On voit, d'après cette dernière expression de ds, que la rectification de la cycloïde dont il s'agit se ramène à celle d'une ellipse dont les demi-axes sont $2a(n+1)$ et $2a(n-1)$. En intégrant depuis $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à ψ, qui répondent à $\varphi = 0$ et à φ, il vient, par une notation connue,

$$s = 2a(1+n)\left[E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right) - E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}, \psi\right)\right];$$

et conséquemment l'arc AS est exprimé par

$$2a(1+n).E\left(\frac{2\sqrt{n}}{1+n}\right).$$

Segment. — Si l'on désigne par A le segment OAMM', on a

$$dA = a^2(n - \cos\varphi)^2\,d\varphi;$$

et, en intégrant de manière que $\varphi = 0$ donne $A = 0$, il vient

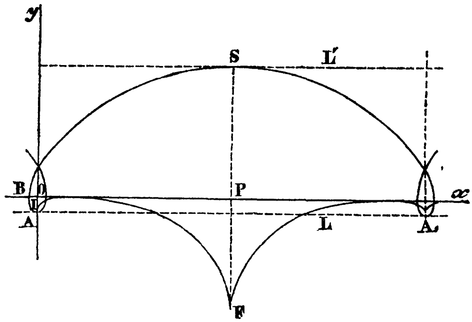
$$A = a^2\left[\left(n^2 + \frac{1}{2}\right)\varphi - 2n\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right],$$

d'où il suit que l'aire $OASA_1O_1$ a pour mesure

$$2\pi a^2\left(n^2 + \frac{1}{2}\right) = 2\pi R^2 + \pi a^2.$$

II. — *Cycloïdes raccourcies.* — Le point G est hors du cercle C, de sorte que $n < 1$. Toutes celles des équations précédentes qui ne supposent pas $n > 1$, s'appliquent ; et nous en déduirons brièvement les principaux caractères de ces courbes, qui sont encore comprises entre les parallèles à Ox dont les équations sont

$$y = R \mp a \text{ (L et L')}.$$



Soient φ' et φ'' les valeurs de φ, comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$, qui rendent nulles y et x, c'est-à-dire qui satisfont aux équations $n - \cos\varphi = 0$ et $n\varphi - \sin\varphi = 0$, et dont la première φ' est moindre que la seconde φ'', puisque $n - \cos\varphi$ est la dérivée de $n\varphi - \sin\varphi$ (théorème de Rolle).

Lorsque φ croît de o à φ', x décroît de o à $-a(\sin\varphi' - n\varphi')$, car $D_\varphi x < 0$; y croît de $-(a - R)$ à o, car $D_\varphi y > 0$; et y' décroît de o à $-\infty$, car $D_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc AB touché en A par la droite L, en B par une parallèle à Oy, et concave vers les deux axes.

De $\varphi = \varphi'$ à $\varphi = \pi$, x est d'abord négative jusqu'à $\varphi = \varphi''$, ensuite positive, et toujours croissante, car $D_\varphi x > 0$; y croît de o à $R + a$, car $D_\varphi y > 0$; et y' décroît de l'∞ à o, car $D_\varphi y' < 0$. On a donc l'arc BS qui coupe Oy en D, dont l'ordonnée est $R - a\cos\varphi''$, touche L' en S, et est concave vers Ox. φ continuant de croître jusqu'à 2π, on a SB_1A_1 symétrique de SBA, et la courbe comprend une infinité de parties telles que ASA_1.

Le rayon de courbure est encore évidemment minimum en A, où sa valeur est $\frac{(a-\mathrm{R})^2}{a}$; et il est maximum en S, où sa valeur est $\frac{(a+\mathrm{R})^2}{a}$, car $\mathrm{D}_\varphi\rho$ passe du positif au négatif quand φ franchit la valeur π (c'est le signe — qu'il faut prendre devant l'expression de ρ).

La développée a deux points de rebroussement I et F correspondant à A et S; elle touche l'axe des x en un point correspondant à B, et dont l'abscisse est $x_1 = \mathrm{R}\varphi'$, ainsi qu'en un point symétrique de celui-là par rapport à SP; et elle est partout convexe vers Ox.

Enfin, on remarquera que l'expression de A fournit, par exemple, l'aire de OAB + OBC + OCMM', le point M répondant à la valeur que l'on donne à φ.

Note. M. Ch. Forestier, agrege des sciences mathematiques, professeur au lycée de Brest, a envoyé aussi une très-bonne et instructive solution de cette question. L'insertion ferait double emploi ou interromprait la suite des travaux que nous devons à l'obligeance de M. Dieu, professeur a Dijon, qui vient d'être nommé professeur à la Faculté de Grenoble.

TM.