

PAUL SERRET

Théorème sur les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 11
(1852), p. 123-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__123_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

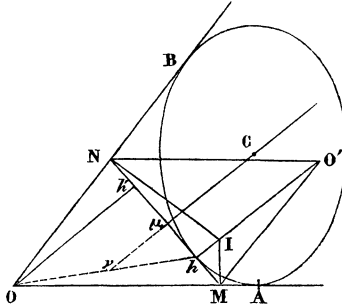
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES CONIQUES;

PAR M. PAUL SERRET,
Professeur.

THÉORÈME. Soit AOB un angle fixe circonscrit à une ellipse; et soit MN une tangente à cette courbe, telle que la portion interceptée MN entre les côtés de l'angle fixe AOB soit un minimum. Les deux points M, N sont également distants du centre C de la courbe.



Ce théorème a été donné par M. Liouville, dans son cours au Collège de France, en même temps que d'autres théorèmes généraux sur les polygones à périmètres minimum circonscrits à une ellipse; l'emploi des coordonnées elliptiques conduit, ainsi que l'a montré M. Liouville, à des démonstrations très-élégantes de toutes ces propositions.

Le théorème énoncé plus haut peut aussi se démontrer géométriquement d'une manière simple, ainsi qu'il suit :

Il faut faire voir que la droite $C\mu$, qui joint le centre C de la conique au milieu μ de MN , est perpendiculaire à MN .

Pour le démontrer, j'observe que, si l'on passe de la tangente MN , correspondant au minimum, à une tangente infiniment voisine $M'N'$, la différence entre les longueurs MN , $M'N'$ sera *du second ordre infiniment petit*, et cela d'après la propriété fondamentale commune au maximum et au minimum. Donc, aux infiniment petits du second ordre près, on aura $MN = M'N'$; donc le point h , où MN touche la conique, sera le point où la droite MN , de longueur constante, inscrite dans l'angle $\angle AOB$, touche son enveloppe. Donc, d'après la théorie des centres instantanés de rotation, si l'on mène par MN des perpendiculaires respectives à OM , ON , perpendiculaires qui se coupent en I , Ih sera perpendiculaire à MN . Mais il est facile de voir que la droite Ih ainsi construite passe par le sommet O' du parallélogramme $OMO'N$, construit sur les côtés OM , ON . Donc, si l'on abaisse du point O , $O'h'$ perpendiculaire sur MN , le milieu μ de hh' coïncidera avec le milieu μ de MN .

Cela posé, si nous construisons la droite lieu des centres des coniques inscrites dans l'angle $\angle AOB$, et touchant MN au point h , nous trouvons que cette droite passe par μ et qu'elle est perpendiculaire à MN . Car, d'après le théorème de M. Gergonne, cette droite doit passer, 1^o par le point μ milieu de MN ; 2^o par le point ν milieu de la droite Oh . Or, ν étant, par définition, le milieu de Oh , et μ étant, comme nous l'avons démontré, le milieu de hh' , la droite $\mu\nu$, lieu des centres, est parallèle à Oh , c'est-à-dire perpendiculaire à MN . Donc le centre C de la conique considérée se trouvant sur cette droite $\mu\nu$ perpendiculaire au milieu de MN , le théorème est démontré.

Remarque. Quand la conique inscrite dans l'angle $\angle AOB$ est une parabole, le théorème précédent ne s'applique plus; mais la méthode que j'ai suivie pour le démontrer conduit encore au résultat. car la condition du minimum

est toujours que la droite $O'h$ soit perpendiculaire à MN . Mais l'on sait que (*), pour la parabole, le sommet O' du parallélogramme construit sur OM et ON , est sur le diamètre passant par le point de contact h de MN . Donc le diamètre correspondant à la tangente à segment minimum est perpendiculaire à cette tangente. Donc :

THÉORÈME. *Un angle fixe étant circonscrit à une parabole, de toutes les tangentes à la courbe, la tangente au sommet est celle qui laisse dans l'angle fixe un segment minimum (**).*

M. Liouville a donné aussi le théorème suivant :

THÉORÈME. *Étant donné un angle fixe AOB circonscrit à une ellipse, soit MN une tangente à la courbe, et telle, que la somme des segments $MO + NO$ qu'elle détermine sur les côtés de l'angle fixe soit un maximum; F, F' étant les deux foyers de la courbe; on aura*

$$FM \cdot F'M = FN \cdot F'N,$$

de sorte que les deux points M et N seront sur une même ellipse de Cassini homofocale à l'ellipse proposée.

Démonstration. On verra, en effet facilement, que le point de contact h de la tangente MN qui satisfait à la condition du maximum, doit être le point où la droite MN , se mouvant dans l'angle AOB de manière que la somme $OM + ON$ reste constante, touche son enveloppe.

Déterminant le point h par cette dernière condition, on arrive à cette égalité

$$(1) \quad Mh \cdot MO = Nh \cdot NO, \quad \text{ou} \quad \frac{Mh \cdot MO}{Nh \cdot NO} = 1.$$

(*) On le voit d'ailleurs immédiatement sur la figure, puisque $O'h$ est parallèle à $\mu\nu$ qui représente la direction des diamètres de la parabole.

(**) Voir tome III, page 187, § XIV.

D'un autre côté, quelle que soit la tangente MN, on a

$$(2) \quad \frac{Mh \cdot MO}{Nh \cdot NO} = \frac{FM \cdot F'M}{FN \cdot F'N}.$$

Comparant (1) et (2), il en résulte que l'on a, pour le cas du maximum,

$$\frac{FM \cdot FM'}{FN \cdot F'N} = 1, \quad \text{ou} \quad FM \cdot F'M = FN \cdot F'N.$$

C. Q. F. D. (*).