NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

KORALEK

Moyen de calculer promptement les racines d'une équation du quatrième degré, qui n'a aucune racine réelle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 117-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__117_0>

MOYEN DE CALCULER PROMPTEMENT LES RACINES D'UNE ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ, QUI N'A AUCUNE RACINE RÉELLE;

PAR M. KORALEK,
Professeur.

1. La résolution d'une équation du quatrième degré revient, comme on sait, à trouver une fonction des racines qui n'ait que trois valeurs. On a employé trois genres de fonctions : 1° $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$; c'est la solution d'Euler, que Lagrange considère comme la plus simple (*Résolut. des Équations numériques,* note XIII, p. 366; troisième édition, 1826). 2° $x_1x_2 + x_3x_4$; c'est à quoi ramène la solution de Ferraris, comme le fait voir M. Serret dans son excellent *Traité d'Algèbre supérieure,* p. 218; 1849. Dans cette méthode, on n'a besoin de connaître qu'une seule racine de la résolvante. 3° $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$; c'est le $\frac{1}{2}\xi'$ de Lagrange (*Résolut. des Équations numériques,* p. 264); mais il ne s'arrête pas à cette fonction et la ramène à la précédente, $x_1x_2 + x_3x_4$, qu'il désigne par u. Or, lorsque toutes les racines sont imaginaires, il est plus avantageux de s'en tenir au calcul de $\frac{1}{2}\xi'$.

En effet, soit

$$x^4 - 2ax^3 + bx^2 - 2cx + d = 0$$

une équation que l'on suppose n'avoir aucune racine réelle; les racines sont donc de la forme

$$\alpha \pm \beta i, \quad \alpha' \pm \beta' i;$$

les trois valeurs de $\frac{1}{2}\xi'$, ou de

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \quad (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad (x_1 + x_4)(x_2 + x_3),$$

sont donc

$$4\alpha\alpha', \quad (\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2, \quad (\alpha+\alpha')^2+(\beta-\beta')^2.$$

Ainsi les trois racines de la résolvante sont réelles, deux sont positives, et $4\alpha\alpha'$ est la plus petite de ces racines. On peut obtenir cette résolvante par la théorie connue des fonctions symétriques; mais on y parvient plus promptement à l'aide des relations newtoniennes, entre les racines et les coefficients de l'équation. Ces relations donnent

$$\begin{aligned}
&\alpha+\alpha' = a,\\
&\alpha^2+\beta^2+\alpha'^2+\beta'^2+4\alpha\alpha' = b,\\
&\alpha'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha(\alpha'^2+\beta'^2) = c,\\
&(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2) = d.
\end{aligned}$$

Posons

$$y = \alpha\alpha',$$

la deuxième et la troisième équation donnent

$$\alpha^2+\beta^2 = \frac{(b-4y)\alpha - c}{\alpha-\alpha'}, \quad \alpha'^2+\beta'^2 = \frac{(4y-b)\alpha'+c}{\alpha-\alpha'}.$$

Substituant ces valeurs dans la quatrième équation, et se rappelant que $(\alpha-\alpha')^2 = a^2-4y$, on obtient

$$(1)\quad 16y^3 - 8by^2 + (b^2+4ac-4d)y - abc + abd + c^2 = 0,$$

et y est le $\frac{1}{2}\xi'$ de Lagrange. Cette équation ayant deux racines positives doit présenter au moins deux variations, ce qui établit des relations d'inégalité entre les coefficients de l'équation.

Soient y_1, y_2, y_3 les racines de cette équation rangées suivant l'ordre ascendant de grandeur; on aura

$$\begin{aligned}
&\alpha\alpha' = y_1,\\
&(\alpha+\alpha')^2+(\beta+\beta')^2 = a^2+2y_1+(\beta-\beta')^2 = 4y_2,\\
&(\alpha+\alpha_,)^2+(\beta-\beta')^2 = a^2+2y_1+(\beta+\beta')^2 = 4y_3;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les valeurs de β et β' en fonction des trois racines y_1, y_2, y_3.

On a aussi

$$\alpha + \alpha' = a,$$

$$\alpha = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - y_1}, \quad \alpha' = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - y_1}.$$

On a trouvé ci-dessus,

$$\beta^2 = \frac{(b - 4y_1)\alpha - c}{\alpha - \alpha'} - \alpha^2;$$

donc la seule valeur de y_1 suffit pour déterminer β et aussi β'.

Observation. α étant réel, on a toujours

$$y_1 \leqq \frac{a^2}{4},$$

lorsque les quatre racines de l'équation donnée sont imaginaires. On a

$$4y_2 \geqq a^2 + 2y',$$

et, à fortiori,

$$4y_2 \geqq a^2 + \frac{a^2}{2}, \quad \text{ou} \quad 4y_2 \leqq \frac{3a^2}{2},$$

et, de même,

$$4y_3 \geqq \frac{3a^2}{2};$$

on a

$$\beta\beta' = y_3 - y_2.$$

1^er^ *Exemple:*

$$x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 80x + 125 = 0,$$
$$a = 4, \quad b = 42, \quad c = 40, \quad d = 125;$$

tous les termes de la résolvante étant divisés par 16, on obtient

$$y^3 - 21y^2 + 119y - 195 = 0,$$
$$y_1 = 3, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 13,$$
$$\alpha = 3, \quad \alpha' = 1.$$

On a deux moyens de trouver β et β'; chacun d'eux donne

$$\beta = 4, \quad \beta' = 2,$$

donc

$$x = 1 \pm 2i, \quad x = 3 \pm 4i.$$

Nous donnerons dans un autre article le caractère analytique qui fait connaître qu'une équation du quatrième degré n'a aucune racine réelle (*).

Remarque. La résolvante qui correspond à la fonction

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

a pour racines

$$4(\alpha + \alpha')^2, \quad -4(\beta + \beta')^2, \quad -4(\beta - \beta')^2,$$

c'est-à-dire une racine positive et deux négatives. Cette résolvante est

$$\begin{gathered} y^3 - 4(a^2 - 2b)y^2 \\ + 16(3a^4 - 4a^2b + b^2 - 4ac - 4d)y - 8(a^3 + ab - c)^2 = 0, \end{gathered}$$

et elle doit offrir deux permanences et une variation; donc on doit avoir

$$2b > a^2 \quad \text{et} \quad 3a^4 + b^2 > 4a^2b + 4ac + 4d,$$

et cette résolvante peut évidemment servir aussi à trouver les valeurs de α, α', β, β'.

Note historique sur FERRARIS (Louis). — Il est né à Bologne, le 2 février 1522, d'une famille originaire de Milan et que des événements politiques avaient forcé de se réfugier à Bologne, où elle était tombée dans une triste position. Le jeune Ferraris fut envoyé à Milan, à l'âge de quinze ans, et entra dans la maison de Cardan pour y vaquer à des soins domestiques. Cardan ayant re-

---

(*) Le défaut d'espace nous oblige de supprimer un second exemple où l'habile calculateur trouve avec 12 décimales exactes les racines d'une équation dont les coefficients ont 14 a 15 decimales.

connu des dispositions au jeune Ferraris, le fit étudier et se l'attacha comme secrétaire. Ses progrès dans les mathématiques furent si rapides, qu'il professa ces sciences à dix-huit ans, et découvrit, n'ayant que vingt ans, la solution des équations biquadratiques; et voici à quelle occasion. Jean Colla, mathématicien de Brixen, avait proposé cette question : *Trouver trois nombres en progression continue; on donne la somme 10 des trois nombres, et le produit 6 du premier par le second.* Algébriquement traitée, la question conduit à une équation biquadratique, que Ferraris parvint à résoudre par la méthode qui porte son nom (*). Le cardinal Hercule Gonzague, de Mantoue, le prit sous sa protection, et le fit charger de lever la carte du Milanais; cette opération fut sa principale occupation pendant vingt années consécutives. Il fut aussi précepteur du fils de l'empereur Ferdinand I^{er}, devenu empereur sous le nom de Maximilien II. Ayant ramassé une certaine fortune, et contrairement à l'avis de Cardan, il retourna à Bologne vers 1564, et y mourut en octobre 1565, à l'âge de quarante-trois ans. Ferraris n'a rien écrit; c'est à Cardan que nous devons de connaître ses découvertes mathématiques, et une Notice biographique (*Card. Opera omnia*, t. IX, p. 568; édition de Lyon, 1663). Le portrait qu'il en trace, très-flatteur sous le rapport intellectuel et physique, laisse beaucoup

---

(*) Cardanus. *Ars magna*, cap. XXXIX, *quæst.* IV, *regula* II. Voici ses paroles : *Alia est regula nobilior præcedente et est Ludovici de Ferrariis qui eam me rogante invenit.*

La règle est plus détaillée dans l'Algèbre de Bombelli, p. 353. *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli, divisa in tre libri, in Bologna per Giovanni Rossi*, 1579, in-4. Cet ouvrage très-rare existe à la Bibliothèque nationale.

Le célèbre professeur de Kœnigsberg, M. Otto Hesse, élève de l'illustre Jacobi, a rattaché les résolutions des équations cubiques et biquadratiques a la théorie des déterminants; nous ferons connaître ces solutions remarquables.

à désirer sous le rapport moral. On soupçonne sa sœur Madeleine, veuve et son unique héritière, auprès de laquelle il s'était retiré, de l'avoir fait empoisonner. Cardan dit qu'elle montra peu d'affliction, se remaria quinze jours après, et fit donation de tous ses biens à son mari : la discorde ne tarda pourtant pas à se mettre dans le ménage, et le mari relégua sa femme à la campagne, où, vieille, elle traîna une existence malheureuse. Cardan voit là une juste punition. Toutefois, cet odieux soupçon peut n'être pas fondé; la vie désordonnée de Ferraris explique très-naturellement sa fin prématurée. Cardan dit que Ferraris a fait un travail sur les Commentaires de César et sur l'Architecture de Vitruve.

Les premiers algébristes n'étaient occupés qu'à trouver des nombres *pensés;* c'est à cette occupation qu'on doit la résolution des équations. Comme les questionneurs ne pensaient que des nombres positifs, on rejetait les solutions négatives comme inutiles ; de là le nom de *racines fausses,* que Descartes donne encore par habitude aux racines négatives. C'est pourtant la Géométrie de Descartes qui donna la première signification des solutions négatives. La géométrie contemporaine paraît être sur la voie de nous apprendre l'emploi pratique des racines imaginaires. Cette théorie est encore enveloppée de nuages, et son introduction dans l'enseignement présenterait de grands dangers ; mais il ne faut pas la dédaigner. En toutes choses, le dédain est un mauvais conseiller.

On trouve deux épigrammes de Ferraris, l'une en grec, l'autre en latin, dans les deux poëmes du savant milanais Conti (Noël) ; *de Horis, liber unus* (grec et latin) ; de anno libri IV.