MOURGUE

Note sur la théorie des logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 109-112
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__109_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES LOGARITHMES;

PAR M. MOURGUE,
Professeur au lycee de Marseille.

De simples considérations d'arithmétique permettent d'arriver à l'inégalité

$$\log\left(1+\frac{1}{10^{n+1}}\right)<\frac{1}{9.10^{n}},$$

et d'en déduire une limite de l'erreur commise dans l'emploi de la proportion tabulaire.

Admettons, pour un instant, l'inégalité

$$(1+\alpha)^{m}<1+m\alpha(1+\alpha)^{m},$$

dans laquelle m désigne un nombre entier, et α un nombre commensurable ou non.

Si, après lui avoir donné la forme

$$\alpha > \frac{(1+\alpha)^m - 1}{m(1+\alpha)^m},$$

on pose

$$1+\alpha = \sqrt[m]{10},$$

il en résulte

$$\alpha > \frac{9}{10m},$$

et, par suite,

$$1 + \frac{9}{10m} < \sqrt[m]{10};$$

d'où l'on déduit, en faisant $m = 9.10^n$,

$$1 + \frac{1}{10^{n+1}} < \sqrt[9.10^n]{10}.$$

Mais, dans le système décimal dont il s'agit ici, le logarithme de $\sqrt[9.10^n]{10}$ est $\frac{1}{9.10^n}$. Donc

$$\log\left(1 + \frac{1}{10^{n+1}}\right) < \frac{1}{9.10^n}.$$

Cela posé, on a

$$\log(N+h) - \log N = \log\frac{N+h}{N},$$

$$\log(N+2h) - \log(N+h) = \log\frac{N+2h}{N+h};$$

d'où

$$\log\frac{N+h}{N} - \log\frac{N+2h}{N+h}$$

$$= \log\frac{(N+h)^2}{N^2+2Nh} = \log\left(1 + \frac{h^2}{N^2+2Nh}\right).$$

Pour une même valeur de h, cette dernière quantité diminue quand N augmente, et, pour une même valeur de N, elle diminue avec h.

Soient maintenant $h = \frac{1}{10^2}$ et $N = 10^4$, on aura

$$\log\left(1 + \frac{h^2}{N^2 + 2Nh}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{10^{12}}\right) < \frac{1}{9.10^{11}}.$$

Ainsi, quand un nombre $N \geqq 10\,000$ reçoit des accroissements successifs égaux à $\frac{1}{100}$, il en résulte, pour son logarithme, des accroissements correspondants, dont les valeurs vont en décroissant, et deux de ces valeurs consécutives sont égales entre elles, à moins de $\frac{1}{9.10^{11}}$.

Soit i le premier de ces accroissements; le second sera compris entre i et $i - \frac{1}{9.10^{11}}$, le troisième entre i et $i - 2\frac{1}{9.10^{11}}, \ldots$, le centième entre i et $i - 99.\frac{1}{9.10^{11}}$.

Donc, si le nombre N croît de 100 centièmes ou 1, la variation Δ de son logarithme sera la somme des cent accroissements précédents, et sera comprise entre $100i$ et $100i - \frac{100.99}{2}.\frac{1}{9.10^{11}}$, c'est-à-dire que

$$\Delta = 100i - \frac{\theta.100.99}{2.9.10^{11}},$$

en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1.

De même, si le nombre N croît de p centièmes, on aura, pour la variation de son logarithme,

$$D = pi - \frac{\theta' p(p-1)}{2.9\ 10^{11}}.$$

On déduit de là

$$D - \Delta\frac{p}{100} = \frac{\theta p.99 - \theta' p(p-1)}{2.9.10^{11}}.$$

Or, pour $p < 100$, le numérateur est inférieur à 10^4, et le second membre est plus petit que $\frac{1}{18.10^7}$ ou $\frac{1}{1,8.10^8}$.

Ainsi l'égalité $D = \Delta \frac{p}{100}$, qui n'est autre chose que la proportion usitée, donne pour D une valeur exacte, à moins de $\frac{5}{9}$ d'une unité du huitième ordre. Cette limite est la moitié environ de celle que donne l'algèbre, comme on le voit dans l'intéressant article de M. Serret (p. 31).

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité précédemment admise.

De l'égalité

$$(1+\alpha)^m = (1+\alpha)^{m-1}(1+\alpha),$$

on déduit

$$\begin{array}{lcl}
(1+\alpha)^m & < & (1+\alpha)^{m-1} + \alpha(1+\alpha)^m, \\
(1+\alpha)^{m-1} & < & (1+\alpha)^{m-2} + \alpha(1+x)^m, \\
\vdots & & \vdots \\
1+\alpha & < & 1 \quad + \alpha(1+\alpha)^m;
\end{array}$$

d'où, par addition,

$$(1+\alpha)^m < 1 + m\alpha(1+\alpha)^m.$$