NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MENTION

Théorèmes sur le quadrilatère rectiligne

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 103-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__103_1>

THÉORÈMES SUR LE QUADRILATÈRE RECTILIGNE;

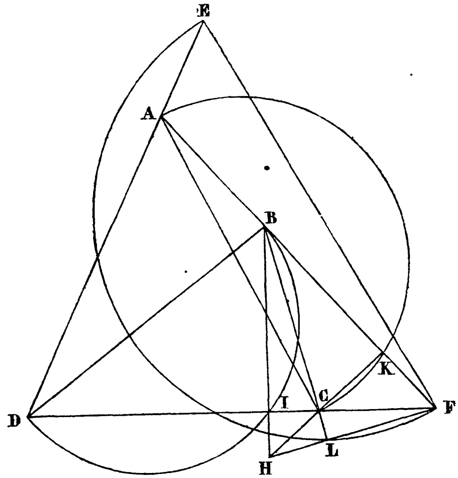
PAR M. J. MENTION.

---

1. THÉORÈME. *Les trois circonférences décrites sur les diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres, ont un même axe radical.*

Je démontrerai ce théorème en me fondant sur cette simple observation, que, s'il existe plus d'un point de commune puissance par rapport à trois cercles, les centres de ces cercles et tous les points de commune puissance sont respectivement sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre; la seconde est l'axe radical commun des trois cercles.

Soit, en effet, un quadrilatère complet ABCDEF; je décris sur les trois diagonales BD, AC, EF les demi-circonférences BID, CKA, ELF. Alors, les droites BI, CK, LF, hauteurs du triangle BCF, se couperont en un même point H. D'ailleurs, à cause des quadrilatères inscriptibles BICK, BILF, CKLF, les produits HI.BH, HC.HK, HF.HL sont égaux, c'est-à-dire que le point H est de commune puissance par rapport aux trois cercles. Or, comme il y a quatre triangles formés avec trois des côtés du quadrilatère, il y aura quatre points de commune puissance par rapport à nos cercles, ce qui prouve la proposition.



Mais on remarquera que l'observation faite ci-dessus met en évidence d'autres propriétés du quadrilatère; aussi vais-je, d'un seul coup, formuler quatre énoncés :

1°. *Les trois milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite;*

2°. *Les quatre points de rencontre des hauteurs des* *triangles formés successivement avec trois côtés du quadrilatère, sont en ligne droite* (*) ;

3°. *La ligne des points de rencontre est l'axe radical commun des trois circonférences décrites sur les diagonales du quadrilatère comme diamètre ;*

4°. *La ligne des points de rencontre est perpendiculaire à la ligne des milieux des diagonales.*

2. Autre remarque importante : le cercle circonscrit au triangle formé par les diagonales étant orthogonal à ceux que nous venons de considérer, son centre appartiendra à la ligne des points de rencontre des hauteurs.

Corollaire. La polaire d'un quelconque des six sommets du quadrilatère complet, par rapport au cercle que déterminent les points d'intersection des diagonales, ne peut être parallèle à la ligne des milieux de celles-ci.

Car la droite qui joint ce sommet au centre du cercle serait perpendiculaire à la ligne des milieux; elle serait donc précisément la ligne des points de rencontre des hauteurs, *ligne* qui ne peut contenir aucun des sommets du quadrilatère, à moins qu'il ne dégénère en trapèze.

3. *Définition.* Deux points sont conjugués par rapport à uneco nique, lorsque la polaire de l'un d'eux passe par l'autre, et *vice versâ.*

Lemme I. Le milieu de la distance d'un point au point de concours de ces polaires par rapport à deux cercles, appartient à leur axe radical.

Lemme II. Les sommets opposés d'un quadrilatère quelconque sont respectivement conjugués au cercle passant par les points d'intersection de ses diagonales.

(*) Qu'il me soit permis de dire que je me suis en quelque sorte imposé l'usage des transversales, dans la *solution* insérée au commencement du tome V de ce Recueil, concernant ce second énoncé.

THÉORÈME. *Dans un quadrilatère complet, deux couples de sommets opposés étant conjugués par rapport à un cercle, il en sera de même à l'égard du dernier couple.* (OTTO HESSE.)

Ainsi, je suppose un cercle M pour lequel les sommets opposés (A, C), (B, D), par exemple, soient *conjugués*, et je veux montrer que les sommets E et F seront aussi *conjugués*. Du *lemme* I il résulte immédiatement que la ligne des milieux est l'axe radical du cercle M_1 circonscrit au triangle ayant pour côtés les trois diagonales, et du cercle M, parce que les polaires d'un sommet relatives aux deux cercles se croisent au sommet opposé. Encore, d'après le *lemme* I, le point de concours des polaires du sommet E se trouve sur une parallèle à la ligne des milieux (*) conduite par le sommet F : se trouvant déjà sur une seconde droite issue de F (*lemme* II), de direction différente de la première (voyez *corollaire*, art. 2), *ce point de concours* sera précisément le sommet F.

C. Q. F. D.

Le mode précédent de démonstration indique, sur-le-champ, une propriété commune à tous les cercles dont les extrémités des diagonales d'un quadrilatère complet leur sont respectivement conjuguées : *tous ces cercles ont la ligne médiane des diagonales de ce quadrilatère pour commun axe radical.*

Corollaire. Le théorème subsiste pour une conique quelconque; évident par la méthode projective.

(*) On abregerait le discours en appelant *médiane* la ligne des milieux des diagonales d'un quadrilatère.