ABEL TRANSON

Sur le nombre des points multiples dans une courbe algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 10 (1851), p. 91-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1851_1_10__91_1>

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES DANS UNE COURBE ALGÉBRIQUE;

PAR M. ABEL TRANSON.

1. Si toute droite, menée par le point A d'une courbe, a en ce point deux ou plusieurs rencontres avec la courbe, c'est un point multiple.

Le nombre de ces rencontres marque le degré de multiplicité du point.

Cette *singularité* est généralement due à la circonstance de deux ou plusieurs branches de courbe passant par le point dont il s'agit. Si l'angle sous lequel deux de ces

(*) Le célèbre calculateur astronome a fait un emploi utile du théorème de Sturm; un académicien de même nom a retranché de l'enseignement ce théorème comme appartenant à la haute théorie, chose inutile; un représentant de même nom, dans la discussion sur les conducteurs-voyers, a déclaré la haute théorie chose indispensable. Ces trois noms désignent-ils la même personne? O. TERQUEM.

branches se coupent vient à s'annuler, alors *il peut y avoir rebroussement,* mais cela n'a pas lieu nécessairement. Ainsi la circonstance que deux des tangentes en un point multiple viennent à se confondre, est un des caractères du rebroussement, mais non pas un caractère exclusif.

Le point multiple peut aussi être isolé, on l'appelle alors *point conjugué ;* et, ici, il faut remarquer que, réciproquement, dans une courbe algébrique, tout point isolé est nécessairement multiple.

2. Le caractère commun de tous les points multiples, quel que soit leur degré de multiplicité, qu'ils présentent ou non un rebroussement, qu'ils soient ou non isolés ; c'est d'être à la fois sur les trois courbes représentées par

$$F = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dF}{dy} = 0; \tag{3}$$

où $F = 0$, équation du degré n, représente la courbe donnée. De là ce premier résultat, que leur nombre, ne pouvant dépasser celui des intersections de deux courbes du degré $n - 1$, a pour limite supérieure $(n - 1)^2$ (*).

L'objet de cette Note est de trouver une limite beaucoup moins élevée que $(n - 1)^2$ pour le nombre total des points multiples en général ; et ensuite de donner des limites spéciales pour les points multiples des différents degrés de multiplicité.

D'abord on peut s'assurer que les solutions communes aux deux courbes $\frac{dF}{dx} = 0$, et $\frac{dF}{dy} = 0$, ne sont pas toutes

(*) C'est par inadvertance que j'ai mis $n(n - 1)^2$, *voir* t. IX, p. 289.
O. T.

sur la courbe $F = 0$, à moins que celle-ci ne présente un faisceau de n droites. Cela est évident pour le second degré, puisque l'ensemble des deux équations (2) et (3) y représente le centre de la courbe, et je le démontre en général comme il suit.

La courbe donnée par l'équation

$$(4) \qquad x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} = 0$$

contient manifestement tous les points communs à (2) et (3); or, mettons l'équation (1) de la courbe donnée sous la forme

$$F_n + F_{n-1} + F_{n-2} + \ldots = 0,$$

où les différents termes sont des fonctions homogènes; alors l'équation (4) deviendra

$$x\frac{dF_n}{dx} + y\frac{dF_n}{dy} + x\frac{dF_{n-1}}{dx} + y\frac{dF_{n-1}}{dy} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$nF_n + (n-1)F_{n-1} + (n-2)F_{n-2} + \ldots = 0:$$

donc tous les points communs aux équations (1), (2) et (3) satisfont à l'équation suivante, qui est du degré $(n-1)$,

$$(5) \qquad F_{n-1} + 2F_{n-2} + 3F_{n-3} - \ldots = 0;$$

et réciproquement tous les points communs aux équations (2), (3) et (5) sont sur la courbe proposée.

La question est réduite à savoir si toutes les solutions communes aux équations (2) et (3) peuvent appartenir à l'équation (5). Or, toute équation de degré $(n-1)$, et qui est satisfaite par toutes les solutions communes aux équations (2) et (3), est de la forme

$$\frac{dF}{dx} + \alpha\frac{dF}{dy} = 0,$$

sauf à déterminer convenablement la constante α. De sorte qu'on devrait pouvoir disposer de α de telle sorte que l'équation suivante fût une identité,

$$\frac{dF}{dx} + \alpha \frac{dF}{dy} = F_{n-1} + 2F_{n-2} + 3F_{n-3} + \ldots$$

Mais en développant cette condition on arrive à connaître que l'équation primitive devrait se réduire à la suivante, $F_n(x+1, y+\alpha) = 0$, et par conséquent représenter n droites passant par un point unique, desquelles droites plusieurs peuvent être imaginaires. Je suis donc déjà en droit de dire que le nombre des points multiples est toujours inférieur à $(n-1)^2$.

Je vais faire voir maintenant qu'il est inférieur toujours au nombre de points qui déterminent une courbe du $(n-2)^{ième}$ ordre, lequel est, comme on sait, $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$.

Supposons en effet qu'il soit supérieur ou simplement égal à ce nombre.

On pourrait donc par $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points multiples de la courbe $F=0$, faire passer *au moins* (*) une courbe du degré $n-2$. Or, chacun de ces points vaudrait *au moins* deux rencontres de la courbe auxiliaire avec la proposée. Ainsi le nombre total des rencontres serait au moins $(n-2)(n+1)$, au lieu qu'il est seulement $(n-2)n$; donc, etc.: mais on peut avoir une limite encore moindre en raisonnant comme il suit.

Soit x le nombre des points multiples, et soit pris sur la courbe le nombre de points nécessaires pour y faire passer une courbe du degré $n-2$; c'est-à-dire

(*) Je dis *au moins*, parce que la disposition de ces points en nombre $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ pourrait être telle qu'il y passât non pas une seule courbe du degré $n-2$, mais une infinité.

$\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points, en y comprenant notamment tous les points multiples. Si ces points étaient simples, il en résulterait $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ rencontres *connues*, sans préjudice des autres rencontres en nombre $n(n-2)-\frac{(n-2)(n+1)}{2}$. Mais puisque parmi les points choisis il y en a x multiples, c'est-à-dire *qui sont au moins doubles*, le nombre total des rencontres *connues* est d'*au moins* $\frac{(n-2)(n+1)}{2}+x$. On voit que dans ce raisonnement chaque point multiple est compté *pour un* seulement parmi les points déterminants de la courbe auxiliaire; et il est compté *au moins pour deux* parmi les rencontres.

Après cela, le nombre total des rencontres est tout au plus égal à $(n-2)n$; ce qui donne la condition

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}+x \leqq n(n-2),$$

d'où l'on tire

$$x \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Si les inégalités que nous avons supposées avaient lieu en sens contraire, c'est que l'équation $F=0$ représenterait la réunion de deux courbes au moins de degré inférieur. Pour ce cas-là et pour tous ceux où $F=0$ se décomposerait en facteurs rationnels, il est clair que les raisonnements ne vaudraient plus; mais aussi on n'aurait pas véritablement une courbe du degré n. Par cette réflexion, j'échappe à la difficulté qu'aurait présentée le nombre des *points doubles* d'un système de n droites, lequel est $\frac{n(n-1)}{2}$, et ainsi surpasse la limite ci-dessus.

La limite qu'on vient de trouver est celle du nombre total des points multiples; c'est, en particulier, celle des *points doubles* qui, manifestement, comprennent tous les autres. On pourrait cherchèr aussi la limite des *points triples* parmi lesquels figureraient tous ceux dont le degré de multiplicité est supérieur à trois. Mais, pour abréger, je me borne à dire que le nombre des points dont la multiplicité est μ ou supérieure à μ, ne peut pas surpasser le nombre donné par la formule

$$\frac{(n-\mu)[2n(\mu-1)-\mu]}{\mu^2(\mu-1)}.$$

En effet, le nombre des points du degré de multiplicité μ ne saurait atteindre celui des points qui déterminent une courbe du degré $\frac{2n}{\mu}-2$ (si cette formule $\frac{2n}{\mu}-2$ donne un nombre fractionnaire, entendez alors que le nombre des points en question ne peut pas *atteindre* celui des points déterminant la courbe dont le degré surpasse immédiatement $\frac{2n}{\mu}-2$) ; cela résulte de la relation

$$\mu.\frac{\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)\left(\frac{2n}{\mu}+1\right)}{2}>\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)n,$$

où le premier membre représente le nombre des rencontres nécessaires que la proposée aurait avec une courbe de degré $\frac{2n}{\mu}-2$ passant par des points de multiplicité μ, en nombre

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu}-2\right)\left(\frac{2n}{\mu}+1\right)}{2}.$$

On est donc assuré de pouvoir placer tous les points en question sur une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. Chacun de ces points entrera pour une simple unité dans le nombre des points déterminants de la courbe auxiliaire, mais il déterminera μ rencontres; de sorte qu'en appelant y le nombre des points multiples de degré μ, on a la relation

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} + (\mu - 1)y \lesseqq \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)n,$$

d'où l'on tirera pour y la formule ci-dessus indiquée,

$$\text{(A)} \qquad y \overset{=}{<} \frac{(n-\mu)[2n(\mu-1)-\mu]}{(\mu-1)\mu^2}.$$

3. On peut se proposer une autre recherche : celle du nombre des points multiples de degré μ, pour lesquels les μ branches de courbe se touchent, c'est-à-dire ont une tangente unique sans qu'il y ait d'ailleurs rebroussement. Cela exige un nouvel artifice. Je prends en chacun de ces points la tangente commune pour tangente de la courbe auxiliaire; de sorte que chaque tel point en vaudra deux par rapport à la détermination de la courbe auxiliaire, et en vaudra 2μ pour les rencontres.

Avec cette construction, on prouvera aisément que le nombre des points en question ne peut pas atteindre celui des points nécessaires à la détermination d'une courbe du degré $\frac{n}{\mu} - 2$, c'est-à-dire n'atteint pas à

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{n}{\mu} + 1\right)}{2};$$

autrement, il serait possible de construire une courbe de ce degré $\frac{n}{\mu} - 2$, ayant, avec la proposée, un nombre de rencontres égal à

$$2\mu.\frac{\left(\frac{n}{\mu}-2\right)\left(\frac{n}{\mu}+1\right)}{2},$$

c'est-à-dire égal à $\left(\frac{n}{\mu}-2\right)(n+\mu)$, ce qui est absurde.

Partant de là et appelant z le nombre des points dont il s'agit, on aura aisément l'inégalité

$$\frac{\left(\frac{n}{\mu}-2\right)\left(\frac{n}{\mu}+1\right)}{2}+2(\mu-1)z<\left(\frac{n}{\mu}-2\right)n,$$

d'où

$$\text{(B)}\qquad z \overset{=}{<} \frac{(n-2\mu)[n(2\mu-1)-\mu]}{4\mu^2(\mu-1)}.$$

4. En dernier lieu, on peut demander le nombre maximum des points dont le degré de multiplicité est μ, et où μ' branches ont une même tangente. Je supprime le calcul, mais il sera aisé au lecteur de trouver que si ν est le nombre de ces points, on a

$$\text{(C)}\quad \nu \overset{=}{<} \frac{(n-\mu-\mu')}{(\mu+\mu')^2(\mu+\mu'-2)}[2n(\mu+\mu'-1)-\mu-\mu'].$$

Si l'on suppose $\mu'=\mu$, on retombe sur la formule (B), comme cela doit être. Mais cette formule (C) ne donne pas la formule (A) par la substitution de $\mu'=0$; elle est alors en défaut, et cela s'explique parce qu'elle est construite comme la formule (B) en imaginant que la courbe auxiliaire touche dans ses points déterminants les branches qui ont la même tangente; ce qui n'a plus de sens si l'on suppose ensuite qu'aucunes branches ne se touchent.

5. Cramer, dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750), a traité la question du *nombre des points multiples qu'une courbe d'un ordre quelconque peut avoir*. L'auteur, après avoir observé

qu'une courbe de l'ordre m ne peut avoir un point multiple de ce même ordre sans se réduire à ce point unique, ou à un faisceau de m droites, établit, par la simple propriété du nombre des rencontres de la proposée avec une ligne droite, puis avec une courbe du deuxième ordre ou du troisième ordre, etc., qu'une courbe de l'ordre m ne peut pas avoir :

Deux points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de m;

Cinq points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de $2m$;

Neuf points dont les degrés de multiplicité comptés ensemble fassent plus de $3m$;

Etc....

D'après cela, l'auteur forme pour les huit premiers ordres le tableau complet des diverses sortes de points multiples qui peuvent coexister sur une même courbe, toutefois sans avoir égard à la circonstance que deux ou plusieurs branches peuvent se toucher au point multiple. On pourrait réduire sa théorie en un algorithme très-simple où les nombres de points multiples de chaque sorte coexistant dans une même courbe, entreraient comme des indéterminées dans une équation du premier degré, dont il suffirait de chercher les solutions en nombres entiers et positifs; et alors les formules que nous avons données se présenteraient comme répondant aux cas très-particuliers où il n'y aurait à la fois qu'une sorte unique de points multiples.

Nous donnerons bientôt la démonstration que vient de publier l'illustre M. Jacobi, que toute ligne plane de degré n a $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ tangentes doubles. (Crelle, tome XL, page 237; 1850.)

O. Terquem.